UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

problemas en ecuaciones en derivadas parciales con no linealidades sobre operadores diferenciales de segundo orden

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Gregorio Díaz Díaz

Madrid, 2015

Gregorio Díaz Díaz

PROBLEMAS EN ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES CON NO LINEALIDADES SOBRE OPERADORES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Departamento de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1980

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1980
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-35408-1980

GREGORIO DIAZ DIAZ

PROBLEMAS EN ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES CON NO LINEALIDADES SOBRE OPERADORES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Director: D. Jesús Ildefonso Díaz Díaz
Prof. Adjunto de la Universidad
Complutense. Madrid.

Ponente: D. Alberto Dou MasdeXexás
Prof. Catedrático de la Universidad
Complutense. Madrid.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE MATEMATICAS

Dpt° de ECUACIONES FUNCIONALES

Madrid, Mayo 1980

A mis padres,

Quisiera expresar mi más profundo agradecimiento al profesor J. Ildefonso DIAZ, quien me introdujo en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales, a sus ánimos se debe en gran parte mi vuelta a las Matemáticas tras un período de cierto "escepticismo". Nuestras relaciones, que sin temor a equivocarme puedo calificar de fraternales, han convertido su dirección en un cúmulo de comentarios y sugerencias de gran valor para mi.

También quisiera agradecer de una manera primordial los ánimos y comentarios que de una forma más o menos directa me han brindado los profesores Haim BREZIS y Philipe BENILAN. A este último he de agradecer también la gentileza de honrarme con su presencia en el tribunal de esta tesis. Igualmente valiosas han sido las sugerencias que el profesor Pierre-Louis LIONS me ofreció durante la elaboración de esta memoria. A él también estoy vivamente agradecido.

Un especial motivo de orgullo para mi es tener al profesor Alberto DOU como ponente de esta tesis. Mi reconocimiento y mi admiración estarán siempre con él.

Mi reconocimiento está también con los profesores Alfredo MENDIZABAL y Emilio de la ROSA, en cuyos Departamentos he trabajado durante los últimos años en un ambiente de confianza y estímulo.

No quisiera olvidar en esta hora a cada uno de los miembros del grupo de Análisis no Lineal del Departamento de Ecuaciones Funcionales con quienes he vivido la gestación de esta tesis.

La presente memoria no hubiera sido posible sin la amabilidad con que Soledad ESTEVEZ recogió mis comentarios durante su redacción. A su competencia estoy igualmente agradecido.

INDICE

INTRODUCCION

La presente lectura es fruto de la reflexión efectuada a lo largo de estos últimos años sobre algunas propiedades que aparecen en determinados problemas.

La redacción de ciertos resultados obtenidos durante esa reflexión es, por tanto, el objeto de la memoria que ahora presentamos.

En concreto, hemos fijado nuestra atención en el estudio de determinadas propiedades que pueden aparecer cuando sobre algunos problemas no lineales se tienen resultados de comparación. Como modelos se han tomado las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman con obstáculo,

$$\text{(a)}\qquad \begin{cases} \sup\limits_{v\in V} \{A(x,v)u(x) - f(x,v)\} \le 0, & x\in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \le \psi(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ (u(x) - \psi(x)) \,.\, \sup\limits_{v\in V} \{A(x,v)u(x) - f(x,v)\} = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

donde $A(v)$ *es una familia de operadores diferenciales de segundo orden, para el caso estacionario, y ecuaciones de la forma*

$$\text{(b)}\qquad \begin{cases} u_t(t,x) + \beta(-F(D^2u,Du,u,x)) \ni 0, \quad 0 < t, & x\in\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

con diversas clases de condiciones de contorno, para el caso de evolución. La verificación de propiedades de tipo principio del máximo, permite obtener resultados de comparación sobre ambos.

Si interpretamos (a) y (b) en términos de la *Programación Dinámica* *encontramos una relación entre ambos problemas.*

A. Las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman, constituyen un ejemplo clarificador de un hecho atractivo que ha merecido la atención de numerosos matemáticos en los últimos tiempos. Este es el siguiente: diversas disciplinas, como las Ecuaciones en Derivadas Parciales de segundo orden y los problemas unilaterales de una parte, y los problemas de control estocásticos y los de tiempos de parada por otra han sido considerados durante bastante tiempo como pertenecientes a campos distintos y se han desarrollado muy independientemente. Sin embargo, entre ellos existe una estrecha relación que los enriquece mutuamente. Una detallada exposición de este fenómeno puede encontrarse en los textos de A. Bensonssan-J.L. Lions |10|,|11|, ó de W.H. Fleming-R. Rishel |42|, que por su naturaleza didáctica pasamos a comentar.

Es bien conocido, cómo el método de las características, permite expresar de forma explícita la solución de una ecuación hiperbólica lineal de primer orden a partir de una función sobre las trayectorias características. Pues bien, para las E.D.P. de segundo orden elípticas o parabólicas es posible proceder de forma análoga, pero ahora las trayectorias características son procesos estocásticos.

Para las ecuaciones no lineales es posible seguir un método derivado del de Hamilton-Jacobi de el cálculo de variaciones. Recuérdese que allí el método de Hamilton-Jacobi conducía a una ecuación hiperbólica no lineal. Extendiendo tal método a la teoría de control estocás-

tico aparecen ecuaciones cuasilineales. Finalmente, es bien sabido que ciertas Inecuaciones Variacionales, que así mismo constituyen problemas no lineales, poseen una interpretación probabilística (en estos casos se tiene un problema de control cuya variable de decisión es un tiempo de parada).

En el primer capítulo observaremos como las ecuaciones (a) son una caracterización analítica de la solución de un problema de control estocástico, esto es, de un problema de control óptimo sobre soluciones de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. Por tanto, es posible añadir a las técnicas deterministas sobre (a) otras nuevas debidas su interpretación probabilística, lo que permite profundizar grandemente sobre la naturaleza de tal problema. Un ejemplo del enriquecimiento que aporta el considerar ambas técnicas lo constituye la justificación rigurosa de los argumentos de la Programación Dinámica que se empleaban heurísticamente sobre determinados problemas de control. Como indicábamos, (a) es la caracterización de la solución de un problema de control estocástico

$$u(x) = \inf_{B_x} J_x(B_x)$$

donde J_x *es el funcional de coste y* B_x *la variable de decisión. Obviamente se observa la conveniencia de caracterizar algún control óptimo* $\hat{B}_x$, *es decir, alguna variable de decisión para la que*

$$u(x) = J_x(\hat{B}_x).$$

Tal caracterización es posible en términos del conjunto de coincidencia, entre u *y* ψ *(recuérdese la expresión (a)).*

La aportación que aquí presentamos consiste en estimar, bajo condiciones que podemos considerar óptimas, el conjunto de coincidencia. Por tanto, nuestros resultados permiten estimar en algún sentido que se precisará el control óptimo $\hat{B}_x$.

Las técnicas que emplearemos son totalmente deterministas y consisten principalmente en utilizar resultados de comparación sobre *funciones barreras* *adecuadas a nuestros propósitos.*

Como es natural, nuestros resultados son válidos para las Inecuaciones Variacionales con obstáculos y por tanto de gran utilidad sobre problemas de tiempos de parada. Además, en este caso se obtienen resultados para condiciones de contorno de muy diversa naturaleza.

El interés de estos resultados puede ser muy grande, habida cuenta de la aplicabilidad que la teoría de control estocástico ofrece a campos tan diversos como las Ciencias Aeroespaciales, procesos de control industrial, Matemáticas económicas, etc. Una exposición detallada de ese campo de aplicaciones puede encontrarse en W.H. Fleming-R. Rishel |42|, P. Van Moerbeke |79|, D.J. White |80|, etc.

Una sencilla observación de (a) conduce a considerarle como un ejemplo de un caso más general, las *Inecuaciones no cuasilineales*,

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} \lambda u(x) - F(D^2u,Du,u,x) \leq 0, \\ u(x) \leq \psi(x), \\ (u(x) - \psi(x)) \,.\, (\lambda u(x) - F(D^2u,Du,u,x)) = 0, \end{cases}$$

por lo que el profesor P.L. Lions me sugirió extender a estas nuevas inecuaciones los resultados obtenidos sobre (a).

B. Las Ecuaciones no cuasilineales, también llamadas complemente no lineales, $(F(D^2u,Du,u,x) = 0)$ han sido tratadas por numerosos autores. Así, para el caso $N = 2$ son conocidos los trabajos de C. Miranda |66| o R. Courant - D. Hilbert |21|, mientras que para el caso más general una exposición sobre estas ecuaciones puede encontrarse en I.V.Skrypnik |77| o en L.C. Evans-P.L. Lions |40|. Otros autores han empleado este tipo de ecuaciones al estudiar ciertas propiedades (véase por ejemplo C. Pucci |73|, M.H. Protter-H.F. Weinberger |72|, L.C. Evans |37|, D. Kinderlehrer - L. Niremberg - Spruck |51|, |52|).

Sin embargo, no era conocida en la literatura ninguna referencia general sobre las inecuaciones (c). Por tanto para abordar resultados de coincidencia entre u y ψ ha sido imprescindible solucionar previamente las inecuaciones (c). Ello constituye el principal esfuerzo del capítulo II.

Esta tarea se ha llevado a cabo extendiendo, con las modificaciones precisas, determinadas técnicas peculiarmente óptimas que habían sido empleadas en las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman sin obstáculo. En este sentido, ha sido particularmente importante la adaptación de los trabajos de L.C. Evans |37|, L.C. Evans - A. Friedman |41|, L.C. Evans - P.L. Lions |40|, así como los de P.L. Lions |62|, coleccionados en su tésis de Estado.

Las técnicas específicas que se han empleado son de muy diversa índole, desde las clásicas estimaciones "a priori", hasta las más recientes de la teoría no lineal de semigrupos.

Las inecuaciones (c) guardan un "ligero" parecido con las Inecuaciones Variacionales, por lo que se ha tomado a algunas propiedades de estas como un modelo de propiedades que deberían verificar aquellas. Sin embargo, la diferencia es muy grande, basta pensar en la "buena" formulación variacional frente a (c) que sólo admitirá formulaciones en términos de productos semi-interiores.

Finalmente, y tal como era nuestro objetivo inicial se ha estimado el conjunto de coincidencia de u y ψ.

Las inecuaciones (c) se han estudiado de una forma sencilla, por ejemplo suponiendo F adecuadamente regular, verificando condiciones de elipticidad fuerte, etc. En próximos trabajos se abordará el debilitamiento de estas hipótesis.

C. En el caso en que $\beta(r) = r^+ = \max(r,0)$ la ecuación (b) rige modelos que caen dentro de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman, sin obstáculos, de evolución, por lo que el estudio de determinadas propiedades sobre ella ha sido introducido también en esta memoria.

Además, para expresiones concretas de F la ecuación (b) había sido estudiada en G. Díaz-I. Díaz |28|, por lo que en el capítulo III iniciamos una generalización a otros tipos de F, o a otras condiciones de contorno.

En concreto, la propiedad que sobre esas ecuaciones estudiamos es la denominada extinción en tiempo finito, esto es, caracterizamos *las no linealidades* β, *que pueden incluso depender de* x, *para las que la solución* u *de* (b) *es tal que admite un instante* $T_o > 0$ *a partir del cual se anula.*

Ecuaciones de esta naturaleza aparecen también en otros contextos, tales como conducción no lineal del calor, elasticidad con rozamiento, etc. También profundizamos en la relacción existente ente algunas versiones de (b) *y la ecuación*

$$\text{(d)} \qquad \begin{cases} v_t(t,x) - \Delta\beta(v(t,x)) \ni 0, & 0 < t, \quad x \in \Omega \\ v(0,x) = v_o(x) \end{cases}$$

con condiciones de contorno de tipo Dirichlet y Neumann.

Finalizamos ese capítulo con la obtención de algunos resultados sobre <u>*el caso doblemente no lineal*</u>

$$u_t(t,x) + \beta(-F(D^2u,Du,u,x)) \ni 0,$$

esto es, cuando F *representa una no linealidad general.*

Las técnicas que se emplean son las ya conocidas de comparar las soluciones con adecuadas funciones que verifican las propiedades buscadas. Digamos también que las ecuaciones de este capítulo son abordadas en el marco de la teoría abstracta de ecuaciones de evolución gobernadas por operadores acretivos en $L^\infty(\Omega)$.

Finalicemos esta introducción comentando algunos aspectos de la redacción de la presente memoria. Como se colige de lo anterior, ella consta de tres capítulos que han sido escritos autónomamente. Es decir, cada uno de ellos ha sido escrito de manera que pueda ser leidos *sin necesidad de tener en cuenta los demás. A este fin, en cada capítulo se ha hecho una breve introducción que permite recoger los resultados más importantes que existen sobre los problemas que se estudian. Además en ese prólogo se ha procurado adelantar y justificar los resultados que en cada caso se pretenden. Con el fin de esclarecer la exposición, se han añadido algunos comentarios en forma de Notas que conforme a la normativa existente se han recopilado al final de cada capítulo. Ellas han permitido debilitar la carga técnica que en algunos apartados de los capítulos I y II hacen pesada la exposición.*

La terminología que se ha empleado ha sido la habitual en este tipo de problemas, así por ejemplo, se emplea $C_b^2(\mathbb{R}^N)$ *para indicar las funciones de clase 2, acotadas en* $\mathbb{R}^N$*; ó* $H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega)$, $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, *y en general* $W^{m,p}(\Omega)$ *para indicar los espacios de Sobolev de los elementos de* $L^p(\Omega)$ *que admiten derivadas, en el sentido de las distribuciones, hasta de orden* m *pertenecientes a* $L^p(\Omega)$ *(para estos espacios se ha tomado la referencia P.S. Adams |1|).*

CAPITULO I

ESTIMACIONES DEL CONJUNTO DE COINCIDENCIA DE LA SOLUCION DE LOS PROBLEMAS DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN CON OBSTACULO.

§1. PRESENTACION Y DEFINICIONES PRELIMINARES

Los problemas que se consideran en este capítulo son conocidos en la literatura como problemas de tiempos de parada con control sobre los coeficientes de difusión, es decir, problemas de control en los que aparecen simultáneamente un control continuo y un tiempo de parada como variables de decisión.

Aunque con frecuencia, problemas de esta naturaleza admiten una representación analítica perfectamente determinada, sin embargo parece conveniente dar algunas definiciones sobre cuestiones de control y probabilísticas (1) que ayuden a comprender mejor tales problemas.

Consideremos un espacio de probabilidades $(\mathcal{O},\mathcal{Q},P)$ y una familia $\{F^t\}_t$ creciente de sub σ-álgebras de $\mathcal{Q}$, donde $t \in [0,r]$.

Definición 1.1. Diremos que un proceso estocástico $w(t)$ con valores en $\mathbb{R}^N$ es un proceso de Wiener (2) con respecto a F^t, si es continuo y verifica:

a) $w(0) = 0$

b) $E\left[w(t) \mid F^{s}\right] = w(s), \quad \forall s \leq t$

c) $E\left[w(t) - w(s).(w(t) - w(s))^{*} \mid F^{s}\right] = I(t-s), \quad s \leq t,$

donde I representa la matriz identidad en $\mathbb{R}^N$, y por $*$ indicamos la matriz traspuesta (E expresará la experanza matemática). Un proceso así es gausiano.

Consideremos ahora un conjunto cerrado convexo V de $\mathbb{R}^d$.

Definición 1.2. Diremos que un proceso $v(t)$ con valores en V es adaptado respecto a la familia $\{F^t\}$ si $v(t)$ es F^t-medible y las diferencias $v(t) - v(s)$ son independientes de F^s.

Definición 1.3. Llamaremos sistema admisible a $A = (\sigma, \mathcal{Q}, F^t, v(t), w(t), P)$.

Definición 1.4. Se llama tiempo de parada a una variable aleatoria θ, positiva o cero, tal que

$$\text{suceso } \{\theta \leq t\} \subset F^t, \quad \forall t.$$

Un ejemplo sencillo de tiempo de parada es el primer instante de salida de un abierto Ω respecto de cualquier proceso continuo $\xi(t)$, F^t medible para cada t, que se define como

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : \xi(t) \notin \Omega\} .$$

Con el fin de precisar la exposición que sigue, parece necesario considerar primero un conjunto de hipótesis que serán empleadas a lo largo del capítulo.

Sean σ_{ij}, a_i, a_o, f $(1 \leq i,j \leq N)$, funciones de $\mathbb{R}^N \times V$ verificando:

(H)

i) $h(x,v) \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$, $\forall v \in V$, y $h(x,v)$ permanece en un acotado de $C_b^2(\mathbb{R}^N)$ cuando v describe V, $\forall h = \sigma_{ij}, a_i, a_o, f$;

ii) $\exists \rho$ función continua de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$, tal que

$\rho(0) = 0$, $|h(x,v) - h(x,v')| \leq \rho(|v-v'|)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$

$\forall v,v' \in V$, $\forall h = \sigma_{ij}, a_i, a_o, f$;

iii) $a_o(x,v) \geq c_o > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\forall v \in V$, con c_o suficientemente grande

iv) $\exists\ \nu > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\forall v \in V$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$

$a_{ij}(x,v)\xi_i\xi_j \equiv \frac{1}{2}\sigma_{ik}(x,v)\ \sigma_{jk}(x,v)\xi_i\xi_j \geq \nu\ |\xi|^2$ [3]

Teniendo en cuenta los anteriores supuestos y definiciones podemos pasar a describir el problema:

Consideremos un <u>sistema dinámico estocástico</u>, cuyo estado $y_x(t)$ evoluciona según la familia de ecuaciones diferenciales de Ito,

$$(1.1)\quad \begin{cases} d\ y_x(t) = \sigma(y_x(t),v(t))\ d\ w(t) - a(y_x(t),v(t))dt \\ y_x(0) = x, \end{cases}$$

en donde a la función $-a$ se le denominará usualmente, <u>la derivada</u>, y a σ <u>la difución</u>, siendo el estado inicial $x \in \mathbb{R}^N$ (en general

no aleatorio). Recordando lo señalado en la nota ([1]), y de una manera formal, la ecuación (1.1) expresa que en el instante t el sistema se encuentra en el estado conocido $y_x(t)$, mientras que durante el intervalo $]t,t+\varepsilon[$, con ε pequeño, <u>la variación</u> del estado $y_x(t+\varepsilon)-y_x(t)$ es una variable aleatoria gausiana de media $-a(y_x(t),v(t))\varepsilon$ y de varianza $\sigma(y_x(t),v(t)\cdot\sigma^*(y_x(t),v(t))\varepsilon$ ([4]).
(Obsérvese que si $\sigma = 0$, (1.1) representa un sistema ordinario).

Una exposición breve, pero completa, sobre las ecuaciones diferenciales estocásticas puede encontrarse en W. Fleming - R. Rishel [42]. Para una exposición detallada enviamos a I.I. Gikhmman-A.V. Skorokhod, [46], o A. Friedman [44], por ejemplo.

Pues bien, para cada sistema admisible $A = (\Omega,\mathcal{A},F^t,v(t),w(t),P)$ y cada tiempo de parada θ respecto de $\{F^t\}$ se define la <u>función coste</u>

$$(1.2) \qquad J_x(A,\theta) = E\Big[\int_0^\theta f(y_x(t),v(t)) \exp(-\int_0^t a_0(y_x(s),v(s))ds)dt$$

$$+ \psi(y_x(\theta)) \exp(-\int_0^\theta a_0(y_x(t),v(t))dt)\Big],$$

donde $\psi \in C$ (conjunto de funciones acotadas y uniformemente continuas en $\mathbb{R}^N$). Llamaremos <u>estrategia</u> a cada $v(t)$.

Observemos que por ahora x es un simple parámetro.

El funcional $J_x(A,\theta)$ se descompone en dos partes de fácil interpretación:

- <u>un coste integral</u>, correspondiente a lo que se paga si no se para el proceso. En él f representa el <u>coste por unidad de</u>

tiempo, y el término exponencial puede ser interpretado como una actualización de costes;

- un coste final, correspondiente a lo que se paga si se decide pasar el proceso.

Cuando se considera el caso de un dominio Ω de $\mathbb{R}^N$ la función coste es:

$$(1.3)\qquad J_x(A,\theta) = E\Big[\int_0^{\theta\wedge\tau_x} f(y_x(t),v(t))\exp(-\int_0^t a_o(y_x(s),v(x)ds)dt$$

$$+ \psi(y_x(\theta))\chi_{\theta<\tau_x}\ \exp(-\int_0^\theta a_o(y_x(t),v(t)dt) +$$

$$+ h(y_x(\tau_x))\chi_{\theta\geq\tau_x}\ \exp(-\int_0^{\tau_x} a_o\ y_x(t),v(t)dt)\Big]$$

donde τ_x es el primer instante de salida de $y_x(t)$ de Ω. ($\theta\wedge\tau_x = \min\{\theta,\tau_x\}$). Obsérvese que ahora el coste final es:

- $\psi(y_x(\theta))\ \exp(-\int_0^{\tau_x} a_o(y_x(t),v(t))dt)$, si $\theta<\tau_x$, es decir, si se decide parar el proceso antes de que halla salido de Ω;

- $h(y_x(\tau_x))\ \exp(-\int_0^{\tau_x} a_o(y_x(t),v(t))dt)$, si $\theta\geq\tau_x$, es decir, si se decide parar el proceso después del primer instante de salida de Ω. (La función h representará la información sobre la frontera).

De manera análoga se puede describir la situación no estacionaria con muy ligeras modificaciones, entre las que está el considerar un término suplementario correspondiente al coste final cuando se decide parar el proceso antes del horizonte, si éste es finito.

Es claro que se está interesado en la función de coste óptimo

(1.4) $$u(x) = \inf_{A,\theta} J_x(A,\theta),$$

más concretamente, parece natural ocuparse de las siguientes cuestiones:

1) <u>caracterización analítica</u> de la función u,

2) <u>unicidad</u> en la caracterización anterior,

3) existencia de un <u>control óptimo</u>. Es decir, existencia de una variable de decisión, que por abreviar representamos por $(\hat{v}_x,\hat{\theta}_x)$, tal que

(1.5) $$u(x) = J_x(\hat{v}_x,\hat{\theta}_x).$$

La caracterización analítica de u pasa por la definición de un <u>espacio funcional adecuado</u>, lo que determina el problema de la regularidad de la función u.

Si suponemos, momentaneamente, que la función u es <u>regular</u>, concretamente $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, la obtención de su caracterización analítica es posible empleando argumentos heurísticos de la programación dinámica.

Por ejemplo, consideremos el <u>principio de optimalidad de la programación dinámica</u> (para una exposición detallada vease R. Bellman [4]): <u>tomemos cualquier decisión entre las posibles, analicemos los</u>

costes, y supongamos que finalmente las decisiones serán tomadas de manera óptima.

Entonces al ponerse en marcha el proceso anteriormente descrito, para el caso $\mathbb{R}^N$, son posibles las siguientes decisiones:

(i) se decide parar el proceso. Considerando por ejemplo el tiempo de parada $\theta = 0$, el coste correspondiente a tal decisión es $\psi(y_x(0)) = \psi(x)$, luego de acuerdo con (1.2) y (1.4)

$$u(x) \leq \psi(x)$$

(ii) se decide no parar el proceso para alguna estrategia v. Por tanto, durante un tiempo, hasta el instante ε el sistema regido por (1.1) estará "aproximadamente" en la posición aleatoria

$$x - \varepsilon\, a(x,v) + \sigma(x,v)\, (w(\varepsilon))$$

y por definición de u, el coste será superior o igual a

$$u(x - \varepsilon\, a(x,v) + \sigma(x,v)\, (w(\varepsilon))),$$

coste que deberá ser actualizado multiplicando por

$$\exp(-\int_0^{\varepsilon} a_0(x,v)ds) \sim 1 - \varepsilon\, a_0(x,v).$$

En resumen, el coste de esta segunda decisión es aproximadamente

$$X = \varepsilon f(x,v) + E\left[(1 - \varepsilon\, a_0(x,v))u(x - \varepsilon\, a(x,v) + \sigma(x,v)w(\varepsilon))\right].$$

Si la función u admite derivadas parciales continuas de segundo orden, lo que estamos suponiendo, entonces podemos desa rrollar X en función de ε a partir de la regla de Ito sobre diferenciación estocástica (para una completa exposición vease I.I. Gikhman - A.V. Skorokhod [46]) ([5]) aplicada a $u(y_x(t))'$, obteniéndose

$$X = \varepsilon\, f + u - \varepsilon\, a_o u - \varepsilon\, a\, \nabla u + E[\nabla u\, .\, \sigma\, w(\varepsilon)]$$

$$+ \frac{1}{2} E[D^2 u.\sigma.w(\varepsilon)\, .\sigma^*(w(\varepsilon))^*],$$

y recordando las propiedades de los procesos de Wiener, se tiene

$$X = \varepsilon\, f + u - \varepsilon\, a_o u - \varepsilon\, a\, \nabla u + \frac{1}{2} (D_{ij} u)\sigma_{ik}\, .\, \sigma^*_{kj}\, \varepsilon\ ,$$

donde el segundo miembro es una expresión de primero orden en ε y no de segundo como podría pensarse por analogía con los desarrollos de Taylor para el caso determinista.

Como por definición $u \leq X$ se obtiene, tras una división por ε y después hacer $\varepsilon \downarrow 0$

$$- a_{ij}(x,v) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (x) + a_i(x,v) \frac{\partial u}{\partial x_i} (x) +$$

$$+ a_o(x,v)\, u(x) \leq f(x,v),$$

es decir,

$$A(x,v)\, u(x) \leq f(x,v),$$

donde

(1.6) $$A(x,v)u(x) \equiv -a_{ij}(x,v) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (x) + a_i(x,v) \frac{\partial u}{\partial x_i} (x) +$$

$$+ a_o(x,v)u(x).$$

iii) <u>finalmente supongamos que las decisiones son tomadas de una manera óptima</u>, es decir, supongamos que se realiza siempre alguna de las igualdades encontradas en i) y en ii).

Por tanto, siguiendo el principio de Bellman, concluimos la siguiente caracterización de la función u dada en (1.4)

$$(1.7)\qquad \begin{cases} \sup\limits_{v\in V} \{A(x,v)\, u(x) - f(x,v)\} \leq 0 \\ u(x) \leq \psi(x), \\ (u(x) - \psi(x)) \,.\, \sup\limits_{v\in V} \{A(x,v)\, u(x) - f(x,v)\} = 0 \end{cases}$$

conocida como las <u>ecuaciones de Hamilton - Jacobi - Bellman con obstáculo</u>.

Facilmente, se observa que la deducción anterior de (1.7) reposa sobre la regularidad de la función u(x). La dificultad de comprobar "a priori" que u(x) admite derivadas parciales continuas de clase 2 es bastante grande, incluso se pueden construir casos en los que sea falso.

<u>Ejemplo 1</u>. (N.V. Krylov [54]). Sea $N = 1$, $f(x) = -\text{sen}\ x$, $\psi(x) = 20$, $V = [0,1]$, $\sigma(x,v) = v\sqrt{2}$, $a(x,v) = 0$, $a_0(x,v) = 1$.

Para esta situación la función u(x), dada por (1.4), es

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \dfrac{\operatorname{sen} \beta}{\cosh (\beta + \frac{\pi}{2})} \cosh (x + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \beta] \\ -\operatorname{sen} x, & x \in [\beta, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

donde β es una raíz de la ecuación $\tan \beta = \operatorname{ctgh} (\beta + \frac{\pi}{2})$, en $]0, \frac{\pi}{2}[$. Claramente, $u''(\beta^-) = 0$, mientras que $u''(\beta^+) = \operatorname{sen} \beta \neq 0$, y por tanto u no admite derivadas continuas de segundo orden.#

Empleando argumentos probabilísticos N.V. Krylov obtuvo la caracterización (1.7) sin el supuesto $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, incluso bajo hipótesis más débiles que H.

Teorema 1.1. (N.V. Krylov [54]) "Consideremos $\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \in C$, y las hipótesis H, en donde el punto iv) ha sido sustituido por

iv') existen μ, ν, constantes positivas tales que

$$\mu|\lambda| \leq |\sigma^*(x,v)\lambda| \leq \nu|\lambda|, \quad \forall v \in V, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N.$$

Entonces, la función $u(x)$ definida en (1.4) verifica:

a) $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para cualquier $1 < p < \infty$, y $u \leq \psi$

b) $\sup\limits_{v \in V} \{A(x,v)\, u(x) - f(x,v)\} \leq 0$, para casi todo x

c) en el conjunto $\Gamma[u] = \{x : u(x) < \psi(x)\}$ se tiene

$$\sup_{v \in V} \{A(x,v)u(x) - f(x,v)\} = 0, \quad \text{para casi todo } x.$$

Además, cualquier función acotada $\hat{u}$ teniendo la propiedad a) para algún $p \geq N$ y verificando b) y c) para $\Gamma[\hat{u}]$, coincide con u ".#

En apartados posteriores se obtendrán algunas propiedades sobre las ecuaciones (1.7) con degeneración, por lo que parece conveniente hacer algunos comentarios al respecto.

En el teorema 1.1 se obtienen las ecuaciones (1.7) si el proceso controlado no degenera y si los coeficientes son acotados. Sin embargo, cuando no se imponen estos supuestos de no degeneración y acotación la situación cambia apreciablemente, porque entonces la función coste óptimo (1.4) satisface una ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman "normalizada", pudiendose dar el caso de que las ecuaciones usuales (1.7) no tengan ninguna solución. Ilustremos esta situación con algunos resultados de N.V. Krylov.

Teorema 1.2. (N.V. Krylov [56]). "Sea $V = \bigcup_k V_k$, con V_k subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$ y supongamos el conjunto de hipótesis

i) $h(x,v)$, $\psi(x)$ son funciones reales para $x \in \mathbb{R}^N$, $v \in V$, donde $h = \sigma_{ij}, a_i, a_o, f$.

ii) $\frac{\partial}{\partial x_i} h(x,v)$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} h(x,v)$, $\psi(x)$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}$, $f(x,v)$ son continuas en x y uniformemente acotadas respecto (x,v),

(H') para $h = \sigma_{ij}, a_i, a_o, f$.

iii) $a_o(x,v) \geq c_o > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\forall v \in V$, con c_o suficientemente grande

iv") $\exists\, \nu > 0$, i_o tal que

$$\sup_{v \in V_{io}} |\sigma^*(x,v)\xi| \geq \nu|\xi|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall v \in V, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

<u>Entonces, haciendo</u>

$$n^v(x) = |\sigma_{ij}(x,v)|^2 + |a_i(x,v)| + a_o(x,v)$$

<u>y</u>

$$G[\phi] \equiv G(D^2\phi, D\phi, \phi, x) \equiv \sup_{v \in V} \frac{1}{n^v(x)} \left[A(x,v)\phi(x) - f(x,v)\right]$$

<u>se tiene que la función</u> $u(x)$, <u>dada por</u> (1.4) <u>verifica</u>:

a) $u \in W^{2,p}_{loc}(R^N)$, <u>para cualquier</u> $1 < p < \infty$; $u \leq \psi$

b) $G[u] \leq 0$ (en probabilidad),

c) $G[u] = 0$ (en probabilidad) <u>en</u> $\Gamma[u] = \{x : u(x) < \psi(x)\}$". #

Por tanto, la función coste óptimo verifica ahora unas ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman "normalizadas", y parece natural intentar ver si se tiene entonces

(1.8) $F[u] = 0$ (en probabilidad) en $\Gamma[u]$,

donde

$$F[\phi] = F(D^2\phi, D\phi, \phi, x) \equiv \sup_{v \in V} \{A(x,v)\ \phi(x) - f(x,v)\} \quad (^6).$$

Claramente, si $F[u] = 0$ entonces también $G[u] = 0$, luego un posible camino para probar (1.8) sería ver si ello se puede deducir de $G[u] = 0$, que se ha encontrado en el teorema 1.2. Sin embargo, el intento puede fracasar doblemente:

1°. <u>Pueden existir soluciones de</u> $G[\phi] = 0$ <u>que no lo sean de</u> $F[\phi] = 0$

Ejemplo 2. (N.V. Krylov [56]): Sea $\psi = 20$ y

$$F[\phi] \equiv \sup_{b \in \mathbb{R}} \{-\Delta\phi + \phi - 1 - b \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\} .$$

Facilmente, se comprueba que en esta situación la correspondiente función coste es $u(x) = 1$, con $\Gamma[u] = \mathbb{R}^N$.

Por otro lado la ecuación $F[\phi] = 0$ es equivalente al sistema

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = 0, \qquad -\Delta\phi + \phi - 1 = 0$$

que sólo admite la solución acotada $\phi = 1$.

Sin embargo,

$$G[\phi] \equiv \sup_{b \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{-1}{|b| + N+1} (\Delta\phi + \phi - 1) - \frac{b}{|b| + N+1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right\}$$

determina una ecuación $G[\phi] = 0$, equivalente al sistema $\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = 0$, $-\Delta\phi + \phi - 1 \leq 0$ que admite un conjunto infinito de soluciones. #

2°. Puede que las ecuaciones (1.7) no tengan ninguna solución

Ejemplo 3. (N.V. Krylov [56]). Sea $N > 1$,

$$V_k = \{v = (\sigma_{ij}) : 1 \leq i,j \leq N, \ \det v = 1, \ \text{traza } \sigma\sigma^* \leq N\}$$

Para cada estrategia $v = (\sigma_{ij})$ definimos

$$\sigma_{ij}(x,v) = \sigma_{ij}.\sqrt{2}, \quad a_i(x,v) = 0, \qquad a_o(x,v) = \text{traza } \tfrac{1}{2} \sigma\sigma^*$$

$$f(x,v) = f(x), \quad y \quad \psi(x) = \sup |f(x)| + 1.$$

En este caso se tiene $a_o(x,v) > N\sqrt[N]{\det \frac{1}{2} \sigma\sigma^*} = N \geq 1$ y por tanto de acuerdo con (1.2) $u(x) < \psi(x)$.

Luego (1.8) es equivalente, en esta situación, a

(1.9) $$\sup \{- a_{ij} (\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} u) - f\} = 0 \quad (^7),$$

donde el supremo es tomado sobre el conjunto de todas las matrices que verifican $(a_{ij})^* = (a_{ij}) \geq 0$, $\det a_{ij} = 1$.

Finalmente, si $f(x) > 0$ en algún dominio, entonces (1.9) no tiene ninguna solución, puesto que en caso contrario al menos un autovalor de la matriz $(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} u)$ debería ser negativo en cualquier punto de ese dominio, y entonces la cota superior de (1.9) sería igual a ∞.

Este ejemplo sirve también para mostrar como en estos casos de degeneración y no acotación de los coeficientes la función coste (1.4) no tiene porqué verificar las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman (1.7). #

Como se ha señalado las técnicas de demostración de los teoremas 1.1 y 1.2 son fundamentalmente estocásticas. Sin embargo en 1975, M. Nisio [68] simplifica la demostración del teorema 1.1 y estudia nuevas propiedades empleando junto a las probabilísticas, algunas técnicas de análisis no lineal y en concreto de la teoría de semigrupos no lineales.

A partir de 1978 empiezan a aparecer resultados para dominios acotados sobre las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman, sin obstáculo preferentemente, empleando ya técnicas principalmente de Análisis no lineales. Los principales autores que se ocupan de estos resultados son: H. Brézis - L.C. Evans [19], L.C. Evans - P.L. Lions [39], P.L. Lions - J.L. Menaldi [64], A. Friedman - L.C. Evans [41], P.L. Lions [62]

La aportación que se presenta en este capítulo trata sobre algunas estimaciones de las ecuaciones (1.7); más concretamente, sobre la coincidencia de u con el obstáculo ψ ([8]). Tal tipo de estimaciones estan muy relacionadas con el problema de encontrar un control óptimo. Veamoslo en un caso particularmente sencillo:

Supongamos que $V = \{v_o\}$, entonces (1.4) queda determinado por

$$u(x) = \inf_{\theta} J(\theta)$$

y por tanto, el control óptimo consistirá en un tiempo de parada $\hat{\theta}_x$ tal que

$$u(x) = J(\hat{\theta}_x).$$

La caracterización de $\hat{\theta}_x$ es bastante simple y de fácil interpretación,

(1.10) $$\hat{\theta}_x = \inf \{s \geq 0 : u(y_x(s)) = \psi(y_x(s))\}.$$

En efecto, sea

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) < \psi(x)\}$$

y razonemos intuitivamente. Supongamos que en el instante t, el estado del sistema es x, con $x \in C$; entonces sería absurdo parar el proceso pues el coste de tal decisión será $\psi(x)$, superior al óptimo $u(x)$, luego por tanto es mejor <u>continuar</u>. Razonando de esta forma se observa la conveniencia de no parar antes de $\hat{\theta}_x$, además en ese instante $u = \psi$, luego $\hat{\theta}_x$ es óptimo.

Obsérvese que la estructura de $\hat{\theta}_x$ es bastante clasificadora: en cada instante, t es posible decidir la conveniencia de parar o no el proceso, fijandose solamente en el estado del sistema $y_x(t)$, sin utilizar la información pasada $y_x(s)$, $s < t$ (9). Si $y_x(s) \in C$, se continua, y en caso contrario se para el proceso. Por esta razón al conjunto C se le conoce como el conjunto de continuación, y a su complementario como el conjunto de parada o de coincidencia.

En el caso general $V \neq \{v_o\}$ también es posible escoger la estrategia óptima sin conocer la información pasada (para detalle véase W. Fleming - R. Rishel [42]). En este caso estimaciones sobre la estrategia óptima han sido obtenidas por A. Friedman - P.L. Lions [45]. Numerosos ejemplos sobre problemas de tiempos de parada se pueden encontrar en la literatura (vease por ejemplo E.B. Dynkin [36], P. Van Moerbeke [79], etc.) con aplicación, en general, a campos de la Estadística, Economía, etc., tales como fenómenos de ruptura, de warrant, juegos diferenciales.

§2. ESTIMACIONES EN INECUACIONES VARIACIONALES

Para la obtención de nuestros resultados sobre las ecuaciones de Hamilton - Jacobi - Bellman con obstáculo necesitaremos algunos cálculos técnicos. Con el fin de no hacer agobiante demostraciones posteriores mostremoslos en una situación algo más sencilla como son las Inecuaciones Variacionales.

2.1. Condiciones de contorno de tipo Dirichlet

Consideremos un abierto acotado Ω, regular [10] de $\mathbb{R}^N$, de frontera Γ, y sobre él el siguiente problema:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} Au \leq f & \text{en} \quad \Omega \\ u \leq \psi & \text{en} \quad \Omega \\ (Au-f)(u-\psi) = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u = g & \text{en} \quad \Gamma \ (^{11}) \end{cases}$$

donde A es el operador elíptico de segundo orden

$$(2.2)\qquad A\phi = -a_{ij}\,\phi_{x_i x_j} + a_i\,\phi_{x_i} + a_o\,\phi,$$

con $a_{ij} \in C'(\bar{\Omega})$, $a_i, a_o \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leq i,j \leq N$,

verificando:

$$(2.3)\qquad a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\,|\xi|^2, \quad \text{para casi todo } x \in \Omega,\ \forall\xi \in \mathbb{R}^N,$$

para alguna constante positiva α.

$a_o(x) \geq 0$, para casi todo $x \in \Omega$.

El problema (2.1) puede ser formulado en términos variacionales: Hallar $u \in K = \{v \in H'(\Omega) : u \leq \psi,$ para casi todo punto de $\Omega\}$, tal que

$$(2.4) \qquad \int_\Omega Au\,.\,(v-u)dx \geq \int_\Omega f\,.\,(v-u)dx, \quad \forall v \in K; \quad u=g \quad \text{en} \quad \Gamma.$$

Tal problema fue estudiado por H. Brézis |15|, obteniendo el siguiente resultado ([12]):

Teorema 2.0. (H. Brézis |15|): "Si $f \in L^\infty(\Omega)$, $\psi \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $g \in W^{1,\infty}(\Gamma)$ y $a(u,u) \geq \alpha_1 \|u\|$, siendo α_1 una constante positiva, y a la forma bilineal asociada al operador A, escrito en forma divergencia, entonces existe una única solución $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ de (2.1) que se comporta crecientemente respecto de los datos.

Además, existe una constante C tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)\cap W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C\,(\|f\|_\infty + \|A\psi\|_\infty + \|g\|_{W^{1,\infty}(\Gamma)})\text{''}.\#$$

Claramente, la solución u divide a Ω en dos regiones

$\Omega_1 = \{x \in \Omega : Au = f\}$, conjunto de continuación,

$\Omega_2 = \{x \in \Omega : u = \psi\}$, conjunto de coincidencia.

nuestro interés, según se expuso en el apartado anterior, reside en estimar el conjunto Ω_2 a partir de la información que se posee en la frontera. Varios autores se han preocupado de estas estimaciones. Algunos las han obtenido directamente: A. Bensonssan - H. Brézis - A. Friedman | 9 |, N. Yamada |81|, T. Nagai |67|, I. Díaz - M.A. Herrero |34|, ó al contestar a otras cuestiones H. Brézis |18|, I. Díaz |29|.

Los trabajos anteriormente citados estaban referidos al operador $-\Delta + \mu$, y dejaban sin contestar al caso en que se consideran operadores elípticos más generales. Para esta situación general, en G. Díaz |24| anunciamos algunos de los resultados que se exponen en este apartado. El interés del caso general viene dado por la exposición hecha en el apartado anterior.

Como es ya habitual las técnicas que se emplean utilizan resultados de comparación. Así:

Proposición 2.1. "Sean $\hat{f} \in L^\infty(\Omega)$, $\hat{\psi} \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $\hat{g} \in W^{1,\infty}(\Gamma)$ y $u \in H^2(\Omega)$ verificando

$$\begin{aligned} A\hat{u} &\leq \hat{f}, && \text{en casi todo punto de } \Omega, \\ \hat{u} &\leq \hat{\psi}, && \text{en casi todo punto de } \Omega, \\ \hat{u} &= \hat{g}, && \text{en casi todo punto de } \Gamma. \end{aligned}$$

Entonces, si $\hat{f} \leq f$, $\hat{\psi} \leq \psi$, en casi todo punto de Ω, y $\hat{g} \leq g$ en casi todo punto de Γ, se tiene $\hat{u} \leq u$ en casi todo punto de Ω".

Demostración. Consideremos en la I.V. (2.4) $v = u + (u-\hat{u})^- = \sup(u,\hat{u}) \leq \psi$ ([13]), con lo que una integración por partes conduce a

$$a(u,(u-\hat{u})^-) - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \cdot (u-\hat{u})^- \geq (f,(u-\hat{u})^-) \tag{2.5}$$

donde

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu_A} \equiv a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \cos(n, x_j)$$

es la derivada conormal de ϕ asociada a A, siendo n la normal

<u>exterior</u> a Ω.

Multiplicando a ambos miembros de $A\hat{u} \leq \hat{f}$ por $-(u-\hat{u})^-$, tomando integrales extendidas a Ω, e integrando por partes se tiene

$$(2.6) \qquad a(-\hat{u}, (u-\hat{u})^-) + \int_\Gamma \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu_A} \cdot (u-\hat{u})^- \geq (-f, (u-\hat{u})^-).$$

Ahora bien, como $(u-\hat{u})^-\big|_\Gamma = (g-\hat{g})^- = \sup(0,\hat{g}-g) = 0$, sumando (2.5) y (2.6) se llega a

$$a(u-\hat{u}, (u-\hat{u})^-) \geq 0,$$

y recordando $\phi = \phi^+ - \phi^-$, $a(\phi^+, \phi^-) = 0$, $\forall \phi \in H^1(\Omega)$

$$a((u-\hat{u})^-, (u-\hat{u})^-) \leq 0$$

con lo que la hipótesis de coercividad sobre a determina

$$0 = (u-\hat{u})^-.$$

Por tanto

$$\hat{u} \leq u, \text{ en casi todo punto de } \Omega.\#$$

Con el fin de simplificar los cálculos que siguen escribamos (2.1) en función de $\tilde{u} = u-\psi$.

$$(2.7) \qquad \begin{cases} A\tilde{u} \leq f - A\psi \equiv \tilde{f} & \text{en } \Omega \\ \tilde{u} \leq 0 & \text{en } \Omega \\ (A\tilde{u}-\tilde{f}).\tilde{u} = 0 & \text{en } \Omega \\ \tilde{u} = g-\psi & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

Así mismo, consideremos los supuestos:

(2.8) $\quad f - A\psi \geq \gamma$, en casi todo punto de Ω, siendo γ una constante positiva, y

(2.9) $\quad a_{ii}\, |\xi|^2 + a_i\, \xi_i \xi_o + a_o\, \xi_o^2 \geq 0$, en casi todo punto de Ω,

con $\xi_o, \xi_i \in \mathbb{R}$ y $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$.

Como se mostrará más adelante la hipótesis (2.8) juega un papel importante al estudiar propiedades sobre los conjuntos Ω_1 y Ω_2.

La hipótesis (2.9) es operativa, y aunque a primera vista parezca artificial, sin embargo su exigencia no es muy restrictiva. En efecto, ella puede seguirse de la hipótesis de coercividad sobre a, si ésta es pedida en la forma

(2.10) $\quad a_{ij}\, \xi_i \xi_j + \tilde{a}_i\, \xi_i \xi_o + a_o\, \xi_o^2 \geq \alpha(\xi_i + \xi_o)$. ([14])

Incluso de una manera más sencilla, debido a la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$a_i\, \xi_i \xi_o \geq -|a_i\, \xi_i \xi_o| \geq -\sqrt{a_i}\, |\xi| \xi_o\ ,$$

y por tanto se tiene (2.9) con sólo pedir

(2.11) $\quad a_o(x) \geq c_o > 0$, para c_o constante suficientemente grande, cuando $\xi_o = |\xi|$, con $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$.

Entre los métodos clásicos que existen en la literatura para obtener estimaciones sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales, destaca por su sencillez el de las funciones barreras, que emplearemos aquí (una exposición detallada de este tipo de funciones puede encontrarse en D. Gilbarg - N. Trudinger |47|).

En concreto, consideremos la siguiente función barrera

(2.12) $$v(x) = -\frac{\gamma}{6K}|x-x^\circ|^2, \quad \text{donde} \quad x^\circ \in \Omega, \quad K = \|a_{ii}\|_\infty .$$

De (2.9), deducimos

$$-a_i\,\xi_i\xi_o - a_o\,\xi_o^2 \le a_{ii}\,|\xi|^2.$$

Tomando $\xi_o = |x-x^\circ|$, $\xi_i = \dfrac{2(x_i-\overset{\circ}{x}_i)}{\xi_o}$, con $x \neq x^\circ$, la desigualdad anterior muestra que

$$-2a_i(x_i - \overset{\circ}{x}_i) - a_o\,|x-x^\circ|^2 \le 4a_{ii}$$

y por tanto, tras cálculos elementales

$$Av(x) = \frac{2\gamma}{6K}a_{ii} - \frac{2\gamma}{6K}a_i(x_i - \overset{\circ}{x}_i) - a_o\frac{\gamma}{6K}|x-x^\circ|^2 \le \gamma \qquad ({}^{15})$$

Es decir, bajo los supuestos anteriores, para cada $x^\circ \in \Omega$ la función $v(x)$ correspondiente verifica:

(2.13)
i) $v(x) \le 0, \quad \forall x \in \Omega,$
ii) $Av(x) \le \tilde{f}(x), \quad$ para casi todo $x \in \Omega$.

Teorema 2.1. "Supuestas las hipótesis (2.8) y (2.11), y las consideraciones anteriores sobre los datos, se tiene $u(x^\circ) = \psi(x^\circ)$, si $x^\circ \in \Omega$, y $d(x^\circ,\Gamma) \ge [\frac{6K}{\gamma}\sup_\Gamma(\psi-g)]^{1/2}$".

Demostración. Si x° es como en el enunciado su correspondiente función barrera $v(x)$, además de verificar (2.13), es tal que

$$v(x) = -\frac{\gamma}{6K}|x-x^\circ|^2 \le -\frac{\gamma}{6K}\cdot\frac{6K}{\gamma}\sup_\Gamma(\psi-g) = \inf_\Gamma(g-\psi) \le \tilde{u}(x),$$
$$\forall x \in \Gamma.$$

Por tanto, las propiedades de comparación vistas en la proposición 2.1

concluyen

$$0 = v(x^\circ) \leq u(x^\circ) - \psi(x^\circ) \leq 0.\#$$

La técnica seguida permite incluso estimar algunos valores "a priori" de la solución.

<u>Corolario 2.1</u>. "<u>Consideremos</u> (2.11), <u>y sea</u> ψ <u>tal que</u> $\inf_{\Omega} \psi > 0$. <u>Supongamos así mismo que se tiene</u>

(2.8') $\quad f - a_0 \lambda \geq \gamma$, <u>para casi todo punto de</u> Ω, <u>donde</u> γ <u>es una constante positiva</u>, <u>y</u> $0 < \lambda < \inf_{\Omega} \psi$.

<u>Entonces se tiene</u>, $u(x^\circ) \geq \lambda$, <u>si</u> $x \in \Omega$ <u>y</u> $d(x^\circ,\Gamma) \geq [\frac{6K}{\gamma} .\lambda]^{1/2}$".

<u>Demostración</u>. Dado $x^\circ \in \Omega$, con $d(x^\circ,\Gamma) \geq [\frac{6K}{\gamma} \lambda]^{1/2} = R$, basta considerar $\underline{u}$ solución del problema (2.1) en $B = B(x^\circ;R)$, con obstáculo λ y condiciones homogéneas de Dirichlet en ∂B. Entonces $\underline{u} \leq u$ en B y por el teorema 2.1 aplicado a $\underline{u}$ en B se tiene $\underline{u}(x) = \lambda$, es decir, $u(x) \geq \lambda$. ([16]).#

Si en lugar de considerar funciones barreras <u>puntuales</u> como en (2.12), consideramos barreras <u>locales</u> podemos encontrar estimaciones cerca de la frontera.

En efecto, dado $x^\circ \in \overline{\Omega}$ y $s > 0$ consideremos

(2.14) $$v_s(x) = \begin{cases} -\frac{\gamma}{6K} (|x-x^\circ| - s)^2, & \text{si} \quad |x-x^\circ| > s \\ 0 & \text{, si} \quad |x-x^\circ| \leq s \end{cases}$$

Obsérvese que $w(x) = (|x-x^\circ| - s)^2 = |x-x^\circ|^2 + s^2 - 2s\,|x-x^\circ|$ es tal que

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x_i} = 2(x_i-x_i^\circ) - 2s\,\frac{x_i - x_i^\circ}{|x-x^\circ|} \qquad i=1,\dots,N$$

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} 2 - 2s\,\dfrac{|x-x^\circ|^2 - (x_i-x_i^\circ)^2}{|x - x^\circ|^3}, & \text{si} \quad i=j \\[2ex] 2s\,\dfrac{(x_i-x_i^\circ)\;(x_j-x_j^\circ)}{|x - x^\circ|^3}, & \text{si} \quad i\neq j \end{cases}$$

con $i,j = 1,\dots,N$.

Empleando de nuevo $-a_i\,\xi_i\xi_o - a_o\,\xi_o^2 \leq a_{ii}\,|\xi|^2$ para $\xi_o = (|x-x^\circ| - s)$, $\xi_i = \frac{2}{\xi_o}\,((x_i-x_i^\circ) - \frac{x_i - x_i^\circ}{|x - x^\circ|}\,s)$ se tiene

$$-2\,a_i((x_i-x_i^\circ) - \frac{x_i - x_i^\circ}{|x-x^\circ|}\,s) - a_o(|x-x^\circ| - s)^2 \leq 4\,a_{ii}.$$

Por otro lado,

$$a_{ij}\,\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 2\,a_{ii} - 2\,s\,a_{ii}\,\frac{1}{|x-x^\circ|} + 2\,s\,a_{ij}\,\frac{(x_i-x_i^\circ)(x_j-x_j^\circ)}{|x - x^\circ|^3}$$

$$\leq 2\,a_{ii} - 2\,s\,a_{ii}\,\frac{1}{|x-x^\circ|} + 2\,s\,a_{ii}\,\frac{1}{|x-x^\circ|} = 2\,a_{ii}$$

(Recuérdese como se señaló en la nota ([14]) que las propiedades algebraicas que acompañan al concepto de elipticidad determinan

$$a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \leq a_{ii}\,|\xi|^2).$$

Por tanto, de nuevo bajo los supuestos (2.8) y (2.11), para cada $x^\circ \in \overline{\Omega}$ y cada $s > 0$ la función barrera asociada verifica:

$$\text{(2.15)} \quad \begin{array}{ll} \text{i)} \ v_s(x) \leq 0, & \forall x \in \Omega \\ \text{ii)} \ A\, v_s(x) \leq \tilde{f}(x), & \text{para casi todo} \ \ x \in \Omega. \end{array}$$

Teorema 2.2. "Supuestas las hipótesis (2.8) y (2.11), y las consideraciones de regularidad sobre los datos hechos en este apartado, se tiene: Si $\exists\, x^\circ \in \Gamma$ y $r > \left[\frac{6K}{\gamma} \sup_\Gamma (\psi - g)\right]^{1/2}$, tales que $g(x) = \psi(x)$ en $\Gamma \cap B(x^\circ, r)$, entonces $u(x) = \psi(x)$, en $\Omega \cap B(x^\circ, s)$, donde $s = r - \left[\frac{6K}{\gamma} \sup (\psi - g)\right]^{1/2}$".

Demostración. Para $x^\circ \in \Gamma$ y $s > 0$ como en el enunciado, la correspondiente función barrera $v_s(x)$, además de verificar (2.15), es tal que para cada punto $x \in \Gamma$ se tiene la desigualdad $v_s(x) \leq \tilde{u}(x)$. En efecto, si $x \in \Gamma$ y $|x - x^\circ| < r$ $v_s(x) \leq 0 = \tilde{u}(x)$ por hipótesis, mientras que si $x \in \Gamma$ y $|x - x^\circ| \geq r$ entonces

$$v_s(x) \leq \frac{-\gamma}{6K}(r-s)^2 = -\frac{\gamma}{6K} \cdot \frac{6K}{\gamma} \sup_\Gamma (\psi - g) \leq \inf_\Gamma (g - \psi) \leq \tilde{u}(x).$$

Finalmente, los resultados de comparación y la definición (2.14) concluyen el teorema.#

Una rápida observación de las demostraciones anteriores permite deducir la importancia de la hipótesis (2.8), pues si $g=\psi$ en Γ entonces $u=\psi$ en todo Ω. Por tanto, parece aconsejable intentar probar los anteriores resultados cuando (2.8) sólo es exigida sobre una parte de Ω.

Se puede pensar en repetir las demostraciones anteriores para la nueva situación pero surgen dos dificultades:

a) no se conoce, "a priori", el valor de la solución en la frontera de una parte Ω' de Ω

b) si no se conocen los valores de u en $\partial\Omega'$ no podemos emplear la técnica de comparación expuesta en la proposición 2.1.

La primera dificultad puede salvarse con la estimación "a priori" del teorema 2.0, pero al no especificarse el valor de la constante c tal estimación no sería muy útil para nuestros propósitos. Esta misma razón nos aparta de la posibilidad de emplear dicha estimación para salvar b).

Sin embargo, a) y b) pueden ser superadas si estudiamos el problema (2.1) de una forma <u>no variacional</u>, utilizando el siguiente resultado:

<u>Teorema 2.0'</u>. (A. Bensoussan-J.L. Lions |10|): "<u>Supongamos que</u> $a_{ij}, a_i, a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\overline{\Omega})$, $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi|_\Gamma \geq 0$, <u>y que se verifican</u> (2.3) <u>y</u> (2.11).

<u>Entonces, existe una única</u> $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \geq 1$, <u>solución de</u> (2.1) <u>para</u> $g \equiv 0$" ([17]).#

La regularidad que ahora tenemos permite encontrar una estimación más acorde con nuestros propósitos, empleando el principio del máximo de J.M. Bony |13|.

<u>Proposición 2.2</u>. "<u>Bajo las hipótesis del teorema</u> 2.0' <u>se tiene la siguiente estimación</u>

$$\|u-\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max \{\frac{1}{c_o} \|f - A\psi\|_\infty , \|\psi\|_\infty \}".$$

<u>Demostración</u>. Como $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ los teoremas de inmersión de Sobolev determinan $u-\psi \in C(\overline{\Omega})$, y por tanto sin pérdida de generalidad se puede suponer que existe $x^\circ \in \Omega$, tal que $(\psi-u)(x^\circ) = \|u-\phi\|_\infty$ (obsérvese que si $x^\circ \in \Gamma$ la demostración es trivial).

Aplicando el principio de J.M. Bony al operador $A + c_o$ se tiene

$$\limsup_{x \to x^\circ} \text{ess} \left[A(\psi-u)(x) + c_o(\psi-u)x\right] \geq 0,$$

es decir, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tales que

$$\sup_{B(x^\circ;\delta)} \text{ess} \left[A(\psi-u)(x) + c_o(\psi-u)(x)\right] \geq -\varepsilon$$

y por tanto

$$\inf_{B(x^\circ,\delta)} \text{ess} \left[A(u-\psi)(x) + c_o(u-\psi)(x)\right] \leq \varepsilon$$

De la continuidad de $u-\psi$ podemos suponer que $(u-\psi)(x) < 0$, $\forall x \in B(x^\circ,\delta)$ (basta escoger δ adecuadamente pequeño), con lo que de (2.7) deducimos

$$\inf_{B(x^\circ,\delta)} \left[f(x) - A\psi(x) + c_o(u-\psi)(x)\right] \leq \varepsilon,$$

llegándose a

$$- \|f - A\psi\|_\infty + \inf_{B(x^\circ,\delta)} c_o(u-\psi)(x) \leq \varepsilon,$$

concluyendo de la continuidad de $u-\psi$ la estimación.#

Teorema 2.3. "Supongamos que se tienen las hipótesis del teorema 2.0' así como

(2.16) $f(x) - A\psi(x) \geq \gamma$, en casi todo punto de un abierto Ω' contenido en Ω, para una constante positiva γ.

Entonces $u(x°) = \psi(x°)$, si $x° \in \Omega'$ y

$d(x°,\partial\Omega') \geq [\frac{6K}{\gamma} \cdot \max\{\frac{1}{c_o} \|f-A\psi\|_\infty , \|\psi\|_\infty\}]^{1/2}$.

Demostración. Consideremos para cada $x°$ como en el enunciado, la bola

$B = B(x°,R)$, con $R = [\frac{6K}{\gamma} \cdot \max\{\frac{1}{c_o} \|f-A\psi\|_\infty, \|\psi\|_\infty]^{1/2}$, así como su correspondiente función barrera $v(x)$, dada por (2.12).

Claramente el problema acaba si probamos $v(x) \leq \tilde{u}(x)$, $\forall x \in \overline{B}$, pues entonces $0 = v(x°) \leq u(x°) - \psi(x°) \leq 0$.

Una manera de ver esa desigualdad consiste en demostrar que la función $v(x) - \tilde{u}(x)$ no puede alcanzar un máximo positivo en $\overline{B}$. En efecto, si así ocurriese entonces $\exists\, x' \in B$, tal que $v(x') - \tilde{u}(x') = \|v-\tilde{u}\|_{C(\overline{B})}$ (obsérvese que por la definición de v y la estimación obtenida en la proposición anterior se tiene

$$v(x) = - \frac{\gamma}{6K} R^2 = -\max\{\frac{1}{c_o} \|f-A\psi\|_\infty , \|\psi\|_\infty\} \leq \tilde{u}(x)$$

$\forall x \in \partial B$).

Consideremos, entonces, el principio de Bony, que determina

$$\limsup_{\substack{x \to x^1 \\ x \in \Omega'}} \operatorname{ess} [A(v(x)-\tilde{u}(x)) - c_o(v(x) - \tilde{u}(x))] \geq 0,$$

es decir, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$\sup_{B(x^1;\delta)\cap\Omega'} \text{ess} \left[A(v(x)-\tilde{u}(x)) - c_o(v(x)-\tilde{u}(x))\right] \geq -\varepsilon ,$$

y por tanto,

$$\inf_{B(x',\delta)\cap\Omega'} \text{ess} \left[A(\tilde{u}(x)-v(x)) + c_o(v(x)-\tilde{u}(x))\right] \leq \varepsilon .$$

Ahora bien, si en x' estamos suponiendo que $v-\tilde{u}$ toma un valor positivo, entonces "a fortiori", por las propiedades de la función barrera, $\tilde{u}(x') < 0$, luego por continuidad se puede suponer $\tilde{u}(x) < 0$, $\forall x \in B(x';\delta)\cap\Omega'$ (basta tomar δ suficientemente pequeño), con lo que de (2.7) deducimos

$$\inf_{B(x';\delta)\cap\Omega'} \left[\tilde{f}(x)-A\, v(x) + c_o(v(x) - \tilde{u}(x))\right] \leq \varepsilon .$$

Recordando, finalmente, (2.13) concluimos

$$\inf_{B(x';\delta)\cap\Omega'} c_o(v(x)-\tilde{u}(x)) \leq \varepsilon ,$$

lo que conduce a una contradicción para valores pequeños de ε.#

Siguiendo la técnica de la anterior demostración es posible mostrar los siguientes resultados

Corolario 2.2. "Supongamos (2.11), y sea ψ tal que $\inf_{\Omega} \psi > 0$. Supongamos así mismo que se tiene

(2.8") $f - a_o\,\lambda \geq \gamma$, para casi todo punto de un abierto Ω' en Ω, donde γ es una constante positiva, y $0 < \lambda < \inf_{\Omega} \psi$.

Entonces, $u(x^\circ) \geq \lambda$, si $x^\circ \in \Omega'$ y $d(x^\circ;\partial\Omega') \geq$
$\geq \left[\frac{6K}{\gamma} \max \{\frac{1}{c_o} \|f-a_o\lambda\|_{L^\infty(\Omega)}, \lambda\}\right]^{1/2}$".#

<u>Teorema 2.4</u>. "Supongamos que se tienen las hipótesis del teorema 2.0' y (2.16). Si además $\exists\ x^\circ \in \Gamma$ y $r > \left[\frac{6K}{\gamma} \max \{\frac{1}{c_o} \|f-A\psi\|_\infty, \|\psi\|_\infty\}\right]^{1/2}$, tales en que $\tilde{\Gamma}' \cap B(x^\circ,r)$, $u(x) = 0$, entonces $u(x) = \psi(x)$, en $\Omega' \cap B(x^\circ,s)$, donde $s = r - \left[\frac{6K}{\gamma} . \max \frac{1}{c_o} \{\|f-A\psi\|_\infty, \|\psi\|_\infty\}\right]^{1/2}$ (para $\partial\Omega' = \Gamma'\ \tilde{\Gamma}'$, $\tilde{\Gamma}'\ \Gamma \neq \phi$)".#

Tal como se indicó en el apartado anterior, el problema (2.1) admite una interpretación probabilística como un problema de tiempo de parada. En efecto, siendo (a_{ij}) una matriz definida positiva y simétrica, admite una raíz cuadrada $\frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{2}}$, $a_{ij} = \frac{\sigma_{ik}\sigma_{kj}}{2}$, que es también definida positiva y simétrica. Además, tiene la misma regularidad que (a_{ij}) pues se tiene la expresión (A.Kato |50|)

$$\sigma_{ij}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} (2\ a_{ij}(x) + \lambda)^{-1}\ a_{ij}(x) d\lambda.$$

Entonces, dado un sistema $(\mathcal{O}, \mathcal{Q}, F^t, w(t), P)$ como los descritos en dicho apartado, y un sistema dinámico regido por la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} d\ y_x(t) = \sigma_{ij}(y_x(t)) d\ w(t) - a_i(y_x(t)) dt \\ y_x(0) = x, \end{cases}$$

La función u solución de (2.1) verifica

$$u(x) = \inf_\theta\ J_x(\theta)$$

donde

$$J_x(\theta) = E\left[\int_0^{\theta\wedge\tau_x} f(y_x(t)) \exp(-\int_0^t a_o(y_x(s)) ds) dt + \right.$$

$$+\ \psi(y_x(\theta))\chi_{\theta<\tau_x}\ \exp\left(-\int_0^{\theta} a_o(y_x(s))ds\right) +$$
$$+\ g(y_x(\tau_x))\chi_{\theta\geq\tau_x} . \exp\left(-\int_0^{\tau_x} a_o(y_x(s))ds\right)\Big],$$

siendo τ_x el tiempo de salida del proceso $y_x(t)$ del abierto Ω, y θ un tiempo de parada respecto de F^t.

Una exposición detallada de la anterior interpretación se encuentra en A. Bensonssan-J.L. Lions |10|. En esta misma referencia se muestra como

$$\hat{\theta}_x = \inf\ \{s \geq 0 : u(y_x(s)) = \psi(y_x(s))\}$$

es un <u>tiempo de parada óptimo</u>, es decir,

$$u(x) = J_x(\hat{\theta}_x), \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Una sencilla observación de los resultados obtenidos en este apartado permiten encontrar una estimación del tiempo de parada óptimo.

<u>Teorema 2.5</u>. "<u>Supuestos</u> (2.8) <u>y</u> (2.11), <u>para cada</u> $x \in \overline{\Omega}$ <u>se tiene</u>

$$0 \leq \hat{\theta}_x \leq t_x^{\circ} ,$$

<u>donde</u> $t_x^{\circ} = \inf\ \{s \geq 0 : d(y_x(s),\Gamma) \geq \left[\frac{6K}{\gamma} . \sup_{\Gamma} (\psi-y)\right]^{1/2}$". #

2.2. Otras condiciones de contorno

Las estimaciones del conjunto de coincidencia para condiciones de contorno de tipo Dirichlet pueden ser extendidas cuando se consideran otras condiciones de contorno.

Sea entonces el problema

$$(2.17)\quad \begin{cases} Au \leq f & \text{en} \quad \Omega \\ u \leq \psi & \text{en} \quad \Omega \\ (Au-f)(u-\psi) = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} + \phi \in \beta(u|_\Gamma - g) & \text{en} \quad \Gamma \quad (^{18}) \end{cases}$$

donde β es un grafo maximal monótono en $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \beta(0)$ (una exposición detallada de estos grafos puede encontrarse en H. Brézis |17|). Igual que el problema (2.1), (2.17) puede ser formulado en términos variacionales: Hallar $u \in K = \{v \in H'(\Omega) : u \leq \psi,$ en casi todo punto de $\Omega\}$, tal que

$$(2.18)\quad \int_\Omega Au \cdot (v-u)dx \geq \int_\Omega f(v-u)dx, \qquad \forall v \in K$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \phi \in \beta(u|_\Gamma - g) \qquad \text{en} \quad \Gamma.$$

Este problema puede ser estudiado a partir del resultado de H. Brézis |15| que señalabamos como teorema 2.0, si suponemos además $\phi \in W^{1,\infty}(\Gamma)$.

Claramente, estamos interesados en estimar el conjunto de coincidencia

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega : u(x) = \psi(x)\} \quad ;$$

por tanto, establezcamos un resultado de comparación.

Proposición 2.3. "Sean $\hat{f} \in L^{\infty}(\Omega)$, $\hat{\psi} \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $\hat{\phi},\hat{g} \in W^{1,\infty}(\Gamma)$ y $u \in H^2(\Omega)$ verificando:

$$A\hat{u} \leq \hat{f} \quad \text{en casi todo punto de} \quad \Omega$$

$$\hat{u} \leq \hat{\psi} \quad \text{en casi todo punto de} \quad \Omega$$

$$-\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu_A} + \hat{\phi} \in \hat{\beta}(\hat{u}|_{\Gamma}-\hat{g}) \quad \text{en casi todo punto de} \quad \Gamma,$$

donde $\hat{\beta}$ es un grafo maximal monótono, de $\mathbb{R}^2$, tal que

$$\beta^{+}(r) = \max\{z : z \in \beta(r),\ r \in D(\beta)\} \leq \hat{\beta}^{-}(r) = \{z : z \in \beta(r), r \in D(\hat{\beta})\}.$$

Entonces, si $\hat{f} \leq f$, $\hat{\psi} \leq \psi$ en casi todo punto de Ω, y $\hat{\phi} \leq \phi$, $\hat{g} \leq g$ en casi todo punto de Γ, se tiene $\hat{u} \leq u$ en casi todo punto de Ω".

Demostración. Consideremos en la I.V. (2.18) $v = u + (u-\hat{u})^{-} = \sup(u,\hat{u}) \leq \psi$, con lo que una integración por partes en (2.18) conduce a

$$(2.19) \qquad a(u,\ (u-\hat{u})^{-}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A}\ (u-\hat{u})^{-} \geq (f,\ (u-\hat{u})^{-}).$$

Multiplicando a ambos miembros de $A\hat{u} \leq \hat{f}$ por $-(u-\hat{u})^{-}$, tomando integrales, e integrando por partes se tiene

$$(2.20) \qquad a(-\hat{u},\ (u-\hat{u})^{-}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu_A}\ (u-\hat{u})^{-} \geq -(f,\ (u-\hat{u})^{-}).$$

Ahora bien,

$$\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu_A} - \frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right) \cdot (u-\hat{u})^{-} \leq (\hat{\phi} - \hat{\beta}^{-}(\hat{u}|_{\Gamma}-\hat{g}) - \phi + \beta^{+}(u|_{\Gamma}-g)).(u-\hat{u})^{-} \leq$$

$$\leq (\beta^+(u|_\Gamma - g) - \hat{\beta}^-(\hat{u}|_\Gamma - \hat{g})).(u-\hat{u})^- \leq 0,$$

en efecto, si $\hat{u} > u$ en algún punto de Γ, entonces para algún ξ se tiene

$$u-g \leq \xi \leq \hat{u}-\hat{g} \ ,$$

y por tanto

$$\beta^+(u|_\Gamma - g) \leq \beta^+(\xi) \leq \hat{\beta}^-(\xi) \leq \hat{\beta}^-(u|_\Gamma - \hat{g}).\#$$

Sumando entonces (2.19) y (2.20) se tiene

$$a(u-\hat{u},\ (u-\hat{u})^-) \geq 0$$

y recordando que $\phi = \phi^+ - \phi^-$, $a(\phi^+,\phi^-) = 0$, $\forall \phi \in H'(\Omega)$,

$$a((u-\hat{u})^-,\ (u-\hat{u})^-) \leq 0,$$

finalmente, la hipótesis de coercividad sobre a determina

$$(u-\hat{u})^- = 0 \Longrightarrow \hat{u} \leq u, \text{ para casi todo punto de } x.\#$$

Como es conocido, cuando se consideran condiciones de contorno distintas a las de tipo Dirichlet la "forma" del dominio Ω juega un papel muy importante en el estudio de algunas propiedades. En concreto, sobre los puntos $x°$ de coincidencia entre u y ψ va a pesar fuertemente la "forma" de Ω, al menos al emplear la técnica de las funciones barreras.

Consideremos el problema (2.17) relativo a condiciones de contorno homogéneas de <u>tipo Neumann</u> que se corresponden con el caso en que $\beta(r) \equiv 0$.

<u>Teorema 2.6</u>. "<u>Sea</u> $\beta(r) \equiv 0, \ \forall r \in \mathbb{R}$ <u>y supongamos que se verifica</u> (2.8) <u>y</u> (2.11), <u>así como las hipótesis del teorema</u> 2.0 <u>relativas a</u> (2.17). <u>Entonces, si</u> $x^\circ \in \Omega$ <u>es tal que</u> $\eta_{x^\circ} = \inf_{x \in \Gamma} a_{Nj} \cos(n(x), x_j) > 0$ (<u>donde</u> n <u>es el vector normal exterior a</u> Ω), <u>y</u>

$$d(x^\circ,\Gamma) \geq \left[\frac{3K}{\gamma \eta_{x^\circ}} \sup_{\Gamma} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu_A} - \phi\right)\right],$$

<u>se tiene</u> $u(x^\circ) = \psi(x^\circ)$".

<u>Demostración</u>. Sea $\tilde{u} = u-\psi$, que claramente verifica

$$(2.21) \qquad \begin{cases} A\tilde{u} \leq f-A\psi = \tilde{f} & \text{en casi todo punto de } \Omega, \\ \tilde{u} \leq 0 & \text{en casi todo punto de } \Omega, \\ (A\tilde{u} - \tilde{f}).\tilde{u} = 0 & \text{en casi todo punto de } \Omega, \\ -\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\nu_A} + \hat{\phi} \in \beta(\tilde{u}|_\Gamma - \tilde{g}) & \text{en casi todo punto de } \Gamma \end{cases}$$

donde $\tilde{\phi} = \phi - \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu_A}$, $\tilde{g} = g-\psi|_\Gamma$.

Consideremos $x^\circ \in \Omega$ tal como en el enunciado del teorema. La función barrera correspondiente, $v(x)$, verificará (2.13). Entonces, si probamos

$$(2.22) \qquad \frac{\partial v(x)}{\partial\nu_A} \leq \phi(x) - \frac{\partial\psi(x)}{\partial\nu_A}, \quad \text{para casi todo } x \in \Gamma$$

la proposición 2.3 concluirá

$$0 = v(x^\circ) \leq u(x^\circ) - \psi(x^\circ) \leq 0.$$

Para probar (2.22) en $x \in \Gamma$, introducimos un cambio de coordenadas referido a una base $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1,\dots,\hat{e}_N\}$ con origen en x°, tal que la dirección de e_N coincida con la del vector $\overline{x\,x^\circ}$. Para esa nueva base las coordenadas de x y $n(x)$ serán respectivamente

$$x = (\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_N), \qquad n(x) = (\hat{n}_1,\ldots,\hat{n}_N)$$

con $\hat{x}_1 = \ldots = \hat{x}_{N-1} = 0$, $\qquad \hat{x}_N = |x-x^\circ|$.

Por tanto $v(x) = -\frac{\gamma}{6K}\ \hat{x}_N^2$ y entonces

$$\frac{\partial v(x)}{\partial \nu_A} = a_{Nj}\left(\frac{-2\gamma}{6K}\right)\hat{x}_N \cos(\hat{n}(x),\, x_j) \leq -\sup_{\Gamma}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu_A} - \phi\right) \leq \phi(x) - \frac{\partial \psi(x)}{\partial \nu_A}\,.\#$$

Consideremos ahora el problema (2.17) relativo a condiciones de contorno de tipo mixto que corresponden a grafos de la forma $\beta(r) \equiv \mu\, r$, $\quad \mu > 0$.

Teorema 2.7. "Sea $\beta(r) \equiv \mu\, r$, con $\mu > 0$, y supongamos que se tienen las hipótesis del teorema 2.6. Entonces, si $x^\circ \in \Omega$ es tal que $\eta_{x^\circ} > 0$, y

$$(2.23) \qquad d(x^\circ,\Gamma) \geq \left[\frac{\eta_{x^\circ}^2}{\mu^2} + \frac{2K}{\mu\gamma}\sup_{\Gamma}\left(\mu\,\psi + \frac{\partial \psi}{\partial \nu_A} - \phi\right)\right]^{1/2} - \frac{\eta_{x^\circ}}{\mu}\,,$$

se tiene $u(x^\circ) = \psi(x^\circ)$".

Demostración. Para x° como en el enunciado bastará con probar que

$$\frac{\partial v(x)}{\partial \nu_A} + \mu\, v(x) \leq \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_A}(x) + \mu\, \tilde{u}(x), \quad \text{para casi todo } x \in \Gamma.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las consideraciones del teorema anterior se tiene

$$\frac{\partial v(x)}{\partial \nu_A} + \mu\, v(x) \leq -\frac{2\gamma}{6K}\hat{x}_N\ \eta_{x^\circ} - \frac{\mu\gamma}{6K}\ \hat{x}_N^2\,.$$

Finalmente, como el lado derecho de (2.23) es la raíz positiva de la ecuación

$$\frac{\mu\gamma}{6K} r^2 + \frac{\gamma\eta_{x^\circ}}{3K} r - \sup_\Gamma (\mu\,\psi + \frac{\partial\psi}{\partial\nu_A} - \phi) = 0,$$

obtenemos

$$\frac{\partial v(x)}{\partial\nu_A} + \mu\, v(x) \leq -\sup_\Gamma (\mu\,\psi + \frac{\partial\psi}{\partial\nu_A} - \phi) = \inf_\Gamma (\phi - \frac{\partial\psi}{\partial\nu_A} - \mu\,\psi) \leq$$

$$\leq \phi(x) - \frac{\partial\psi}{\partial\nu_A}(x) - \mu\,\psi(x) = \frac{\partial\tilde{u}(x)}{\partial\nu_A} + \mu\,\tilde{u}(x), \quad \text{para casi todo } x \in \Gamma. \#$$

Escojamos por último condiciones de contorno de tipo <u>Signorini</u>, es decir, $u\big|_\Gamma \leq g$, $\frac{\partial u}{\partial\nu_A} \leq \phi$, $(u\big|_\Gamma - g)\cdot(\frac{\partial u}{\partial\nu_A} - \phi) = 0$.

Este tipo de condiciones de contorno puede expresarse mediante el grafo

$$\beta(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r < 0 \\ [0,+\infty[, & \text{si } r = 0 \\ \emptyset & \text{si } r > 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

<u>Teorema 2.8</u>. "<u>Sea</u> β <u>como en</u> (2.24), <u>y supongamos que se tienen las hipótesis del teorema</u> 2.6. <u>Entonces, si</u> $x^\circ \in \Omega$ <u>es tal que</u> $\eta_{x^\circ} > 0$, <u>y</u>

$$d(x^\circ,\Gamma) \geq \max\left\{\frac{3K}{\gamma\eta_{x^\circ}} \sup_\Gamma (\frac{\partial\psi}{\partial\nu_A} - \phi),\ \left[\frac{6K}{\gamma} \sup_\Gamma (\psi - g)\right]^{1/2}\right\},$$

<u>se tiene</u> $u(x^\circ) = \psi(x^\circ)$".

Demostración. Para un $x°$ como en el enunciado, bastará con probar

$$v(x) \leq g(x) - \psi(x), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial \nu_A} \leq \phi(x) - \frac{\partial \psi(x)}{\partial \nu_A}, \quad \text{para casi todo } x \in \Gamma,$$

pero ello se sigue de las demostraciones de los teoremas 2.1 y 2.6. #

Como en el caso de condiciones de contorno de tipo Dirichlet, aquí también es posible encontrar estimaciones cerca de la frontera que sólo enunciamos.

Teorema 2.9. (Condición de tipo Neumann homogéneas): "Bajos las hipótesis del teorema 2.6, supongamos que existen $x° \in \Gamma$ y $r > [\frac{3K}{\gamma \eta^r_{x°}} \sup_\Gamma (\frac{\partial \psi}{\partial \nu_A} - \phi)]$, tales que $\frac{\partial \psi}{\partial \nu_A}(x) = \phi(x)$ en $\Gamma \cap B(x°,r)$ donde $\eta^r_{x°} = \inf_{\Gamma \cap B^c(x°,r)} a_{Nj}(\cos n(x), x_j) > 0$ (B^c es el complementario de B). Entonces, $u(x) = \psi(x)$, en $\Omega \cap B(x°,s)$, con $s = r - [\frac{3k}{\gamma \eta^r_{x°}} \sup_\Gamma (\frac{\partial \psi}{\partial \nu_A} - \phi)]$". #

Teorema 2.10. (Condición de tipo mixto): "Bajo las hipótesis del teorema 2.6, supongamos que existen $x° \in \Gamma$ y $r > [(\frac{\eta^r_{x°}}{\mu})^2 + \frac{2K}{\mu\gamma} \sup_\Gamma (\mu \psi + \frac{\partial \psi}{\partial \nu_A} - \phi)]^{1/2} - \frac{\eta^r_{x°}}{\mu}$, tales que $\frac{\partial \psi}{\partial \nu_A} + \mu \psi = \phi$ en $\Gamma \cap B(x°,r)$.

Entonces, $u(x) = \psi(x)$, en $\Omega \cap B(x°,s)$, con

$$s = r - \left[\left(\frac{\eta^r_{x^\circ}}{\mu}\right)^2 + \frac{2K}{\mu\gamma} \sup_{\Gamma} \left(\mu\,\psi + \frac{\partial\psi}{\partial\nu_A} - \phi\right)\right]^{1/2} + \frac{\eta^r_{x^\circ}}{\mu} \text{''}. \#$$

<u>Teorema 2.11</u>. (Condiciones de Signorini) "<u>Bajo las hipótesis del teorema</u> 2.6, <u>supongamos que existen</u> $x^\circ \in \Gamma$ y

$r > \max \{(\frac{3K}{\gamma\eta^r_{x^\circ}} \sup_{\Gamma} (\frac{\partial\psi}{\partial\nu_A} - \phi)), (\frac{6K}{\gamma} \sup_{\Gamma} (\psi-g))\}^{1/2}$ <u>tales que</u>

$g(x) = \psi(x)$ <u>y</u> $\phi(x) = \frac{\partial\psi(x)}{\partial\nu_A}$ <u>en</u> $\Gamma \cap B(x^\circ,r)$.

<u>Entonces</u>, $u(x) = \psi(x)$, <u>en</u> $\Omega \cap B(x^\circ,s)$, <u>con</u>

$$s = r - \max \{(\frac{3K}{\gamma\eta^r_{x^\circ}} \sup_{\Gamma} (\frac{\partial\psi}{\partial\nu_A} - \phi)), (\frac{6K}{\gamma} \sup_{\Gamma} (\psi-g))^{1/2}\}\text{''}. \#$$

Estimaciones como las encontradas en este contexto tienen un papel importante en el estudio de diversas cuestiones tales como fenómenos de ruptura, el problema del warraut de una acción de bolsa, etc. Una exposición detallada de este tipo de aplicaciones puede encontrarse en la referencia ya citada P. Van Moerbeke |79|.

En otro contexto no muy lejano, sería interesante encontrar las estimaciones del conjunto de coincidencia para difusiones degeneradas reflejadas a la salida del dominio (ver J.L. Menaldi |65|). Ello será motivo de un próximo trabajo empleando las ideas desarrolladas en el teorema 3.3.

3. ESTIMACIONES EN LAS ECUACIONES DE H-J-B.

Consideremos de nuevo la situación general expresada por las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman con obstáculo

$$(3.1)\ (1.7)\quad \begin{cases} \sup\limits_{v \in V} \{A(x,v)u(x)-f(x,v)\} \leq 0, & \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^N \\ u(x) \leq \psi(x), & \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^N \\ (u(x)-\psi(x)) \cdot \sup\limits_{v \in V} \{A(x,v)u(x)-f(x,v)\} = 0, & \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

con todas las notaciones y observaciones expuestas en el primer apartado. Así mismo, a lo largo de esta exposición supondremos la hipótesis H. Por los motivos repetidamente expuestos estamos interesados en estimar el conjunto de coincidencia de la solución u con el obstáculo ψ, para ello distinguiremos dos casos, atendiendo al dominio.

3.1. CASO $\mathbb{R}^N$

Recuérdese que en esta situación los resultados de N.V. Krylov, y en particular el que aquí hemos enumerado como teorema 1.1, determinan la existencia y unicidad de la solución $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ de (3.1).

El principal resultado para esta situación general es el siguiente.

Teorema 3.1. "Supongamos que existe un abierto G (posiblemente no acotado), y una constante $\gamma_1 > 0$, tal que

$$(3.2)\qquad f(x,v) - A(x,v)\,\psi(x) \geq \gamma_1, \quad \forall v \in V, \quad \forall x \in G.$$

Entonces, $u(x^\circ) = \psi(x^\circ)$, si $x^\circ \in G$ y

$d(x^\circ,\partial G) \geq [\frac{6\,\gamma_2}{\gamma_1} \sup_{v \in V} (\|a_{ii}(v)\|_\infty)]^{1/2}$, donde

$\gamma_2 = \frac{1}{c_o} \sup_{v \in V} \| f(v) - A(v)\psi\|_\infty$". [19].

Demostración. La comprobación del resultado anterior emplea técnicas muy parecidas a las expuestas en el apartado anterior, por lo que algunos de los cálculos podrán ser utilizados directamente.

Consideremos las funciones auxiliares $\tilde{u} = u-\psi$ y $\tilde{f}(v) = f(v) - A(v)\psi$ que verifican

$$(3.3)\quad \begin{cases} \sup_{v \in V} \{A(x,v)\tilde{u}(x) - \tilde{f}(x,v)\} \leq 0, & \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^N, \\ \tilde{u}(x) \leq 0, & \forall x \in \mathbb{R}^N \\ \tilde{u}(x) \,.\, \sup_{v \in V} \{A(x,v)\tilde{u}(x) - \tilde{f}(x,v)\} = 0, & \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Sobre este problema (3.3) es posible establecer el resultado

Lema 3.1. "La solución $\tilde{u}$ de (3.3) verifica la siguiente estimación "a priori"

$$\|\tilde{u}\|_\infty \leq \frac{1}{c_o} \,.\, \sup_{v \in V} \|\tilde{f}(v)\|_\infty \text{''}.\#$$

Consideremos ahora x° como en el enunciado del teorema y definamos sobre $B_R = \{x \in G : |x-x^\circ| < R\}$ la función barrena puntual

$$v(x) = -k\,|x-x^\circ|^2.$$

Por la hipótesis H, c_o es suficientemente grande, luego puede suponerse que

$$a_{ii}(x,v)\ |\xi|^2 + a_i(x,v)\xi_i\xi_o + a_o(x,v)\xi_o^2 \geq 0$$

con $\xi_o = |\xi|$, $\xi \in R^N$, $\forall v \in V$, y por tanto, trás cálculos elementales

$$A(x,v)\ w(x) \leq 6k\ .\ \|a_{ii}(v)\|_\infty, \qquad \forall x \in B_R, \quad \forall v \in V.$$

(Recuérdese los comentarios y cálculos del apartado 2).

Si ahora consideramos $k = \dfrac{\gamma_1}{6\ .\ \sup\limits_{v \in V} \|a_{ii}(v)\|_\infty}$ podemos concluir

(3.4) $$A(x,v)\ w(x) - \tilde{f}(x,v) \leq 0, \qquad \forall x \in B_R, \quad \forall v \in V,$$

sin más que tener en cuenta la hipótesis (3.2).

Hagamos $R = \left[\frac{\gamma_2}{k}\right]^{1/2}$. Del lema 3.1 se deduce entonces que $w-u$ no puede tomar valores positivos en la brontera ∂B_R ([20]). Finalmente, si probamos que tampoco puede tomar valores positivos en el interior de B_R, concluiremos en particular que

$$0 = w(x^\circ) \leq u(x^\circ) - \psi(x^\circ) \leq 0.$$

Como $\tilde{u}$ es una función acotada y uniformemente continua (recuérdese N.V. Krylov |54|) si suponemos que $w-\tilde{u}$ alcanza un máximo positivo en $\overline{B}_R$, por la elección de R, ha de hacerlo "a fortiori" en algún $x^1 \in B_R$. Además, $x^1 \in C = \{x : \tilde{u}(x) < 0\}$, pues w sólo toma valores no positivos. Por tanto, de la continuidad de $\tilde{u}$ se deduce que en un cierto entorno $B' = B(x^1,\delta)$ se tiene

$$\sup_{v \in V}\ \{A(x,v)\tilde{u}(x) - \tilde{f}(x,v)\} = 0, \qquad \text{para casi todo } x \in B',$$

es decir, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ v(x) \in V$, tales que $0 \leq A(x,v(x))\tilde{u}(x) - \tilde{f}(x,v(x)) + \varepsilon$, para casi todo $x \in B'$; y de (3.4)

(3.5) $\quad A(x,v(x))\, w(x) - \tilde{f}(x,v(x)) \leq A(x,v(x))\, \tilde{u}(x) - \tilde{f}(x,v(x)) + \varepsilon,$

para casi todo $x \in B'$.

Una adecuada utilización del principio de Bony determina

$$\limsup_{x \to x'} \text{ess} \, (A(x,v(x))(w-\tilde{u})(x) - c_o(w-\tilde{u})(x)) \geq 0 \quad ({}^{21}),$$

es decir, $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \ \delta' > 0$ tales que

$$\sup_{B(x',\delta')} \text{ess} \quad (A(x,v(x))(w-\tilde{u})(x)) - c_o(w-\tilde{u})(x)) \geq -\varepsilon.$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer $\delta' < \delta$, con lo que de

$$\sup_{B(x',\delta')} \text{ess} \quad (A(x,v(x))(w-\tilde{u})(x) - c_o(w-\tilde{u})(x)) \geq -\varepsilon$$

y de (3.5) se deduce

$$\sup_{B(x',\delta')} \quad (- c_o(w-\tilde{u})(x)) \geq - 2\varepsilon,$$

de donde

$$\inf_{B(x',\delta')} \quad (c_o(w-\tilde{u})(x)) \leq 2\varepsilon,$$

facilmente se pueden obtener entonces contradicciones para valores pequeños de ε, si suponemos $(w-\tilde{u}(x') > 0$.#

Demostración del lema 1.3. Como $\tilde{u}$ está acotada y es uniformemente continua, existe $x'' \in C = \{x : \tilde{u}(x) < 0\}$, tal que $-\tilde{u}$ alcanza un máximo positivo en x'', además,

$$\sup_{v \in V} \{A(x,v)\tilde{u}(x)-\tilde{f}(x,v)\} = 0, \quad \text{para casi todo} \quad x \in B'' = B(x'',\delta),$$

para algún $\delta > 0$. Por tanto, $\forall \ \varepsilon > 0, \ \exists \ v(x) \in V$ tales que

$$0 \leq A(x,v(x))\,\tilde{u}(x) - \tilde{f}(x,v(x)) + \varepsilon, \quad \text{para casi todo} \quad x \in B''.$$

y de ahí

$$(3.6) \qquad A(x,v(x))(-\tilde{u})(x) \leq -\tilde{f}(x,v(x)) + \varepsilon \leq \|\tilde{f}(.,v(x)\|_\infty + \varepsilon \leq$$

$$\leq \sup_{v \in V} \|\tilde{f}(v)\|_\infty + \varepsilon,$$

para casi todo $x \in B''$.

De nuevo una adecuada utilización del principio de Bony conduce a

$$\lim_{x \to x''} \text{sup ess} \; (A(x,v(x))(-\tilde{u})(x) - c_o(-\tilde{u})(x)) \geq 0,$$

es decir, $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; \delta' > 0$ tales que

$$\underset{B(x'',\delta')}{\text{sup ess}} \; (A(x,v(x))(-\tilde{u})(x) - c_o(-\tilde{u})(x)) \geq -\varepsilon \;.$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer $\delta' > \delta$, con lo que de (3.6) se deduce entonces

$$\sup_{v \in V} \|\tilde{f}(v)\|_\infty + \sup_{B(x'',\delta')} (-c_o(-\tilde{u})(x)) \geq -2\varepsilon,$$

$$-\sup_{v \in V} \|\tilde{f}(v)\|_\infty + \inf_{B(x'',\delta')} (-c_o\,\tilde{u}(x)) \leq 2\varepsilon,$$

finalmente, la continuidad de $\tilde{u}$ en x'' concluye la estimación.# ([22])

Como se indicó en otro lugar la hipótesis (3.2) juega un papel importante en la obtención de estas estimaciones, además es de alguna forma una hipótesis óptima como lo muestra el siguiente resultado.

Ejemplo 4. Consideremos la función $u(x) = -e^{Rx}$, $R > 1$. Claramente verifica $\max\,(-u'' + u - (R^2-1)e^{Rx}, u) = 0$ y no existe ningún punto de coincidencia con el obstáculo.

El teorema 3.1 puede ser extendido al caso no uniformemente elíptico, es decir, cuando se prescinde del punto iv) de H. En esta situación P.L. Lions resuelve el problema (3.1), incluso cuando los coeficientes y el obstáculo pertenecen a $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ mediante el siguienre resultado.

Teorema 3.2. (P.L. Lions |63|). "Supuestos los puntos i), ii) y iii) de H', referidos a $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$, existe una única función u que verifica

$$(3.7)\quad \begin{cases} u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N), \quad A(v)u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N), \quad \sup\limits_{v \in V} \|A(v)u\|_{\infty} < +\infty \\ \sup\limits_{v \in V} \{A(x,v)u(x) - f(x,v)\} \leq 0, \quad \text{para casi todo} \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \leq \psi(x), \quad \text{para casi todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \\ (u(x)-\psi(x)) \cdot \sup\limits_{v \in V} \{A(x,v)u(x) - f(x,v)\} = 0 \quad \text{para casi todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} \leq c \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^N, \quad |\chi| = 1". \# \end{cases}$$

Observemos que la última propiedad indica que la función $u - \frac{1}{2} c|x|^2$ es cóncava.

En la demostración del teorema 3.2 sólo se emplean argumentos probabilísticos; su punto más importante consiste en probar $u = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} u_\varepsilon$ uniformemente en $\mathbb{R}^N$, donde u_ε es la solución de (3.1), cuando $A(v)$ ha sido sustituido por $-\varepsilon\Delta + A(v)$.

Teorema 3.3. "Bajo los supuestos del teorema 3.2, el teorema 3.1 sigue siendo válido".

Demostración. En efecto, si suponemos la hipótesis (3.2) entonces se tiene

$$f(x,v) - A(x,v)\psi(x) - (-\varepsilon\Delta\psi(x)) \geq \gamma_1 + \xi\Delta\psi(x) \geq \gamma_1 - c_\varepsilon,$$

donde claramente c_ε es una constante que tiende hacia 0, cuando ε tiende hacia 0. Sin pérdida de generalidad se puede pensar que $\gamma_1 - c_\varepsilon > 0$, sin más que tomar valores muy pequeños de ε.

Aplicando entonces el teorema 3.1 al problema

$$(3.1)_\varepsilon \qquad \begin{cases} \sup\limits_{v \in V} \{A(x,v)\, u_\varepsilon(x) - \varepsilon\Delta\, u_\varepsilon(x) - f(x,v)\} \leq 0 \\ u_\varepsilon(x) \leq \psi(x), \\ (u_\varepsilon(x) - \psi(x)) \,.\, \sup\limits_{v \in V} \{A(x,v)u_\varepsilon(x) - \varepsilon\Delta\, u_\varepsilon(x) - f(x,v)\} = 0 \end{cases}$$

concluimos

$$u_\varepsilon(x^\circ) = \psi(x^\circ), \quad \text{si} \quad x^\circ \in G \quad \text{y} \quad d(x^\circ;\partial G) \geq \left[\frac{6\gamma_2}{\gamma_1 - c_\varepsilon} \cdot \sup_{v \in V} (\|a_{ii}(v)+\varepsilon\|_\infty)\right]^{1/2},$$

finalmente haciendo tender ε hacia 0 se tiene $u(x^\circ) = \psi(x^\circ)$, para las x° del enunciado.#

Los teoremas 3.1 y 3.3 pueden ser comparados a los resultados obtenidos por A. Friedman - P.L. Lions |45|. Ellos muestran que si $A_k\, f_m - A_m\, f_k \geq c > 0$, para todo $m \neq k$, en $|x| > R$, entonces $\sup\limits_{m \geq 1} \{A_m u - f_m\} = A_k u - f_k$ en $|x| > R_1 > R$, pero sólo cuando los coeficientes de los operadores A_k son constantes.

3.2. DOMINIOS ACOTADOS

Durante algún tiempo las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman con obstáculo (o sin él) entendidas sobre dominios acotados permanecieron sin una respuesta adecuada. Actualmente, existen en la literatura resultados concretos que permiten entender claramente esta nueva situación.

Preferentemente los resultados tratan sobre las ecuaciones H-J-B con condiciones de contorno homogéneas de tipo Dirichlet ([23]). Para problemas con obstáculo la referencia que emplearemos es: ([24])

Teorema 3.4. (P.L. Lions |62|): "*Supuestos* i), ii), iii) *de* H', *y* iv) *de* H *referidos a* $W^{2,\infty}(\Omega)$, *con* $\psi|_{\Gamma} \geq 0$, *entonces existe una única función* $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,\infty}(\Omega)$, *tal que*

$$(3.8) \quad \begin{cases} \sup\limits_{v \in V} \{A(x,v)u(x) - f(x,v)\} \leq 0, & \text{para casi todo } x \in \Omega \\ u(x) \leq \psi(x), & \text{para todo } x \in \overline{\Omega} \\ (u(x)-\psi(x)) \cdot \sup\limits_{v \in V} \{A(x,v)u(x)-f(x,v)\} = 0, & \text{para casi todo } x \in \Omega". \end{cases}$$

Repitiendo entonces las técnicas expuestas en los apartados 2 y 3.1 es posible demostrar los siguientes resultados

Lema 3.2. "*Bajo las hipótesis del teorema* 3.4 *se tiene la siguiente estimación*

$$\|u-\psi\|_{\infty} \leq \max \left(\sup_{v \in V} \frac{1}{c_o} \|f(v)-A(v)\psi\|_{\infty} , \|\psi\|_{\infty} \right)".$$

Teorema 3.5. "<u>Supongamos que se tienen las hipótesis del teorema</u> 3.4, <u>y que existe una constante</u> $\gamma > 0$, <u>tal que</u>

(3.9) $\quad f(x,v) - A(x,v)\psi(x) \geq \gamma$, <u>para casi todo</u> $x \in \Omega$, $\forall v \in V$.

<u>Entonces</u>, $u(x^\circ) = \psi(x^\circ)$, <u>si</u> $x^\circ \in \Omega$, y

$$d(x^\circ,\Gamma) \geq \left[\frac{6}{\gamma} \cdot \sup_{\Gamma} \psi \cdot \sup_{v \in V} (\|a_{ii}(v)\|_\infty)\right]^{1/2}\text{''}.\#$$

Teorema 3.6. "<u>Supongamos que se tienen las hipótesis del teorema</u> 3.4, <u>y sea</u> ψ <u>tal que</u> $\inf_{\Omega} \psi > 0$. <u>Supongamos así mismo que se tiene</u>

(3.10) $\quad f(x,v) - a_0(x,v)\lambda \geq \gamma$, <u>para casi todo</u> $x \in \Omega$, $\forall v \in V$, <u>donde</u>

γ <u>es una constante positiva, y</u> $0 < \lambda < \inf_{\Omega} \psi$.

<u>Entonces</u>, $u(x^\circ) \geq \lambda$, <u>si</u> $x \in \Omega$ y

$$d(x^\circ,\Gamma) \geq \left[\frac{6}{\gamma} \lambda \cdot \sup_{v \in V} (\|a_{ii}(v)\|_\infty)\right]^{1/2}\text{''}.\#$$

Teorema 3.7. "<u>Supongamos que se verifican las hipótesis del teorema</u> 3.5. <u>Entonces, si</u> $\exists\, x^\circ \in \Gamma$ <u>y</u> $r > \left[\frac{6}{\gamma} \sup_{\Gamma} \psi \cdot \sup_{v \in V} (\|a_{ii}(v)\|_\infty)\right]^{1/2}$, tales que $\psi(x) = 0$ <u>en</u> $\Gamma \cap B(x^\circ,r)$, <u>se tiene</u> $u(x) = \psi(x)$ <u>en</u> $\Omega \cap B(x^\circ,s)$, <u>donde</u>

$$s = r - \left[\frac{6}{\gamma} \sup \psi \cdot \sup_{v \in V} (\|a_{ii}(v)\|_\infty)\right]^{1/2}\text{''}.\#$$

Empleando la estimación del lema 3.2 es posible demostrar los anteriores resultados cuando las hipótesis (3.9) y (3.10) son sólo exigidas sobre una parte abierta de Ω. En este caso, hay que reemplazar la cantidad $\sup_{\Gamma} \psi$ por $\max(\sup_{v \in V} \frac{1}{c_0} \|f(v)-A(v)\psi\|_\infty , \|\psi\|_\infty)$.

Como en el caso $\mathbb{R}^N$, también aquí son válidos los teoremas anteriores cuando los operadores no son uniformemente elípticos.

El estudio anterior puede repetirse para dominios no acotados, distintos de $\mathbb{R}^N$.

4. COMENTARIOS FINALES

La obtención de estimaciones sobre el conjunto de continuación, es decir, sobre el conjunto en el que la solución no alcanza el obstáculo, es en general bastante artificiosa. Por ello sólo veremos una caracterización topológica.

Teorema 4.1. "Supongamos que se verifica

(4.1) $\quad f(x,v) - A(x,v)\psi(x) \geq 0, \quad$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\forall v \in V$

Entonces, el conjunto

$$[u < \psi] = \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) < \psi(x)\}$$

es conexo, o en caso contrario sus componentes conexas no son acotadas".

Demostración. Supongamos que $[u < \psi]$ no es conexo y que admite una componente conexa U acotada.

Sobre U se tiene la siguiente desigualdad

(4.2) $$\sup_{v \in V} \{A(v)\psi - f(v)\} \leq 0 = \sup_{v \in V} \{A(v)u - f(v)\}.$$

Por otra parte, "a fortiori" $\partial U \subset \mathbb{R}^N - [u < \psi]$, con lo que

(4.3) $\qquad \psi(x) = u(x), \qquad \forall x \in \partial U.$

Empleando entonces los resultados de comparación deducidos del principio de Bony, por ejemplo los utilizados en el teorema 3.1, concluimos de

(4.2) y (4.3) $\qquad \psi(x) \leq u(x) < \psi(x),$ para todo $x \in U$, lo que constituye un absurdo.#

A un resultado parecido puede llegarse cuando se consideran las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman con obstáculo sobre dominios acotados.

Teorema 4.2. "Supongamos que Γ es conexo, y que se verifica

(4.3) $\qquad f(x,v) - A(x,v)\psi(x) \geq 0,$ para casi todo $x \in \Omega$, $\forall v \in V$.

Entonces, el conjunto

$$[u < \psi] = \{x \in \Omega : u(x) < \psi(x)\}$$

es conexo (supuesto $\psi > 0$ en Γ)".

Demostración. Supongamos que $[u < \psi]$ no es conexo y que U la componente conexa de $[u < \psi]$ que contiene a un entorno de Γ. Sea U' otra componente conexa de $[u < \psi]$ distinta de U.

En U' la solución u verifica la desigualdad

(4.4) $$\sup_{v \in V} \{A(v)\psi - f(v)\} \leq 0 = \sup_{v \in V} \{A(v)u - f(v)\}.$$

Por otra parte $\partial U'$ sólo puede estar contenido en Γ ó en $\Omega - [u < \psi]$, pero por ser U' una componente conexa distinta de U, la frontera de U' no podrá estar en Γ, luego

(4.5) $$\psi(x) = u(x), \qquad \forall x \in \partial U'$$

De nuevo los resultados de comparación sobre (4.4) y (4.5) determinan el absurdo

$$\psi(x) \leq u(x) < \psi(x), \qquad \forall x \in U'. _{\#}$$

Los teoremas 4.1 y 4.2 son válidos cuando se consideran operadores $A(v)$ no uniformemente elípticos.

Según se indicó en el prólogo las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman constituyen un ejemplo muy claro de cómo algunos problemas pertenecen a campos aparentemente distintos y cuyas respectivas técnicas enriquecen el conocimiento de sus propiedades.

Un ejemplo de esto último lo constituye la propiedad de monotonía creciente de la solución respecto del dominio, que aquí demostraremos brevemente a partir de la interpretación probabilística.

Recordemos la exposición del primer apartado; en ella veíamos como la solución de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman con obstáculos, estudiadas sobre dominios acotados y con condiciones de contorno homogéneas de tipo Dirichlet, respondía a la expresión

(4.6) $u(x) = \inf\limits_{(A,\theta)} J_x(A,\theta)$, donde θ es un tiempo de parada, con

(4.7) $$J_x(A,\theta) = E\left[\int_0^{\theta\wedge\tau_x} f(y_x(t),v(t)) \exp\left(-\int_0^t a_0(y_x(s),v(s)ds\right)dt + \right.$$
$$\left. + \psi(y_x(\theta))\chi_{\theta<\tau_x} \exp\left(-\int_0^\theta a_0(y_x(s),v(s))ds\right)\right]$$

siendo τ_x el primer tiempo de salida de Ω del proceso $y_x(t)$.

Consideremos un dominio Ω', de igual regularidad que Ω, acotado y conteniendo estrictamente a Ω, es decir, $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset \Omega'$.

Teorema 4.3. "Supongamos que se verifica

(4.8) $\psi(x) \geq 0$, $f(x,v) \geq 0$, para casi todo $x \in \Omega'$, $\forall v \in V$

Entonces, $u'(x) \geq u(x)$, para todo $x \in \Omega$, donde u' es la solución correspondiente al dominio Ω'".

Demostración. Con las consideraciones correspondientes, la función coste óptimo relativa al dominio Ω' es

$$J_x'(A,\theta) = E\left[\int_0^{\theta\wedge\tau_x'} f(y_x(t),v(t)) \exp(-\int_0^t a_0(y_x(s),v(s))ds)dt + \psi(y_x(\theta))\chi_{\theta<\tau} \exp(-\int_0^\theta a_0(y_x(s),v(s))ds)\right].$$

De la definición de tiempo de salida de un abierto $\tau_x' \geq \tau_x$, y por tanto

$$J_x'(A,\theta) - J_x(A,\theta) = E\left[\int_{\theta\wedge\tau_x}^{\theta\wedge\tau_x'} f(y_x(t),v(t)) \exp(-\int_0^t (a_0 y_x(s),v(x))ds)dt + \psi\, y_x(\theta)(\chi_{\theta<\tau_x'} - \chi_{\theta<\tau_x})(\exp -\int_0^\theta a_0(y_x(s),v(s))ds)\right] \geq 0, \quad \forall\theta,\ \forall A$$

$$(\tau_x' \geq \tau_x \Longrightarrow \chi_{\theta<\tau_x'} \geq \chi_{\theta<\tau_x}).$$

Finalmente, la definición (4.6) concluye el teorema.#

Los resultados del apartado 3 pueden servir para dar estimaciones sobre la variable de decisión óptima en las ecuaciones H-J-B con obstáculo del tipo de las obtenidas en el teorema 2.5. A tal fin es conveniente recordar un resultado interesante obtenido por N.V. Krylov |55| y M. Nisio |68|: "Si V es compacto, entonces toda función medible

$$v_o : \mathbb{R}^N \longrightarrow V, \quad \text{tal que}$$

$$A(x,v_o(x))u(x) - f(x,v_o(x)) = \sup_{v \in V} \{A(x,v)u(x) - f(x,v)\},$$

permite construir un control óptimo". La existencia de funciones v_o como la anterior es también asegurada por los anteriores autores.

Finalmente, es importante hacer constar que las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman constituyen un ejemplo de las ecuaciones no cuasi-lineales, también conocidas como totalmente no lineales, y que pueden expresarse de manera general a partir de la expresión

$$F(D^2u, Du, u, x),$$

donde F verifica una condición de elipticidad.

El estudio de esta situación más general será el objeto del siguiente capítulo.

NOTAS DEL CAPITULO I

([1]) Salvo que se indique lo contrario estas definiciones tendran un caracter meramente expositivo. En cualquier caso, una exposición detallada de tales conceptos puede encontrarse en E.B. Lee - L Markus |61| para lo relativo a la teoría de control y por ejemplo en W. Fleming - R. Rishel |42| los conceptos probabilísticos que se emplearan.

([2]) Este tipo de procesos fue sugerido por Wiener para explicar el movimiento de partículas suspendidas en un fluido. Aunque $w(t)$ es continuo, sin embargo su comportamiento local es bastante excéntrico, y con probabilidad 1 $w(t)$ no es diferenciable en casi ningún punto (ello es debido a que $w(t+s) - w(s)$ tiene varianza s y por tanto tal diferencia es típicamente de orden $s^{1/2}$). La no existencia de $\frac{dw}{dt}$ implica que la velocidad de las partículas no está bien definida. Impropiamente hablando, esto se corresponde con observaciones físicas, sin embargo durante algún tiempo tal hecho fue considerado por los físicos como una limitación del modelo, llegandose incluso a proponer otro por Ornstein y Uhlenbeck en el que las partículas se mueven con velocidades continuas. En ingeniería se conoce como ruido blanco a la derivada formal respecto del tiempo de un proceso de Wiener. Ello es debido a que si se procede formalmente, entonces $v(t) = \frac{dw(t)}{dt}$ puede considerarse como un proceso estacionario, en el que las variable $v(t)$ son independientes para tiempos diferentes, con $E[v(t)] = 0$. La función covarianza $R(s) = E[v(t)v(t+s)]$ se comporta como una δ-Dirac y su transformada de Fourier (la densidad espectral del ruido blanco) es constante.

([3]) A lo largo del capítulo emplearemos el convenio de sumación del índice repetido.

(4) Lo expuesto en la nota (2) puede servir para explicar el porqué las ecuaciones diferenciales estocásticas sólo pueden ser escritas en la forma (1.1).

(5) "Sea ϕ de clase $C^{1,2}$ y $\xi(t)$ un proceso sujeto a una ecuación diferencial estocástica como (1.1), entonces si $\eta(t) = \phi(t,\xi(t))$ se tiene

$$d\eta(t) = \phi_t(t,\xi(t))dt + \phi_x(t,\xi(t))d\xi + \frac{1}{2}\,\phi_{xx}(t,\xi(t))\sigma(t)\sigma^*(t)dt".$$

(6) Obsérvese que ahora F puede tomar el valor ∞.

(7) δ_{ij} es el símbolo de Krnonecker.

(8) Algunos de los resultados que se mostraran a lo largo de este capítulo fueron anunciados en G. Díaz |26|.

(9) Lo que concide con un resultado fundamental en la teoría de control estocástico: cuando se puede observar la evolución del estado, entonces existe, en general, un control markovniano óptimo en la clase de los controles markovnianos o no.

(10) A lo largo de toda la memoria entenderemos por abierto regular, a aquel que tiene una frontera que es una variedad diferencial indefinidamente diferenciable de dimensión N-1 y tal que Ω está localmente a un sólo lado de $\partial\Omega$.

En la mayoría de los casos es suficiente con que $\partial\Omega$ sea de cla C^2.

La exigencia de esta propiedad sobre los dominios acotados Ω permite tratar diversos problemas de contorno con una mayor libertad, al ser válidos en ellos diversos resultados fundamentales, tales como el teorema de trazas, etc.

Para el estudio de algunas cuestiones probabilísticas sobre las ecuaciones de H-J-B, es necesario exigir, a veces nuevas propiedades sobre Ω.

(11) Como parece natural, se sobreentiende la condición de compatibilidad: $\psi \geq g$ en Γ.

(12) Esas hipótesis se supondrán a lo largo del apartado. El problema puede ser abordados bajo hipótesis más generales como se muestra en H. Brézis |15|.

(13) $(u-\hat{u})^- = \sup(0, \hat{u}-u)$, $(u-\hat{u})^+ = \sup(0, u-\hat{u})$.

(14) Las propiedades algebraicas ligadas al concepto de elipticidad determinan que $a_{ij}\ \xi_i\xi_j \leq a_{ii}\ |\xi|^2$, con $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_N)$. El coeficiente $\tilde{a}_i$ es el de los términos diferenciales de primer orden correspondiente al operador A escrito en forma divergencia.

(15) Se puede, igualmente, tomar $K = \sup_{i=1,\ldots,N} (\|a_{ii}\|_\infty)$ en todo el capítulo.

(16) Claramente se necesita que $u \geq 0$ pero eso se sigue de las hipótesis del Corolario 2.1 y de H. Brézis |15|.

(17) La demostración del teorema 2.0' emplea solamente argumentos probabilísticos. Aunque ella está referida al caso $a_0(x) \equiv \alpha =$ cte, se puede extender a nuestra situación.

(18) Logicamente se supondrá siempre la hipótesis de compatibilidad en Γ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu_A} + \beta^+(\psi|_\Gamma - g) \geq \phi.$$

(19) Se puede tener en cuenta lo expuesto en (15).

([20]) Sin perdida de generalidad se supone $B_R \subset G$.

([21]) Aplicaciones de este tipo del principio de Bony aparecen con frecuencia en la literatura, por ejemplo P.L. Lions |62|.

([22]) Compárese la diferencia de esta estimación con la de la proposición 2.2. Recuérdese que aquí no hay condiciones de contorno.

([23]) P.L. Lions también ha estudiado el problema para dos operadores con condiciones de contorno distintas.

([24]) Los resultados que se obtendran en el segundo capítulo pueden servir también de referencia en este apartado.

CAPITULO II

INECUACIONES NO CUASILINIALES

§1. INTRODUCCION Y EL PROBLEMA PENALIZADO

Un amplio campo de fenómenos físicos y teoría de control pueden ser formulados en la clase de las Inecuaciones en Derivadas Parciales de segundo orden. Algunas de ellas han sido tratadas extensamente en la literatura. Este es el caso de las gobernadas por operadores lineales elípticas, o por operadores elípticos cuasilineales, y en general, por aquellas en las que una no linealidad actúa sobre los términos diferenciales de menor orden ([1]).

Las inecuaciones que se estudian en este capítulo pertenecen a un tipo de las gobernadas por operadores completamente no lineales o también denominadas "no cuasilineales", esto es, operadores de segundo orden con una no linealidad general, a los que se les exige una condición de elipticidad.

Más concretamente, sea Ω un dominio regular, acotado, de $\mathbb{R}^N$ y

$$F : \mathbb{R}^{N^2} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función regular, por ejemplo de clase C^2 ([2]), verificándo:

<u>hipótesis de elipticidad</u> ([3])

(1.1) $\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(p,q,r,s)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$, $\forall \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_N) \in \mathbb{R}^N$, para algún $\theta > 0$, y todo $p \in \mathbb{R}^{N^2}$, $q \in \mathbb{R}^N$, $r \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$;

$\exists$ M constante tal que

(1.2) $|F(0,0,0,x)| \leq M$; $|DF(p,q,r,x)|$, $|D^2F(p,q,r,x)| \leq M$, para todo p,q,r,x;

(1.3) $F(0,0,0,x) = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega = \Gamma.$

Estamos interesados en resolver la siguiente inecuación

$$(P) \quad \begin{cases} \max\,\{\lambda u - F(D^2u,Du,u,x),\ u-\psi\} = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma \end{cases}$$

donde ψ será una función que verificará "$\psi(x) \geq 0$ si $x \in \Gamma$", lo que siempre se supondrá, y λ un número real adecuado.

El resultado más importante que obtenemos en este capítulo es

<u>Teorema 1.1</u>. "<u>Supongamos que se verifican</u> (1.1), (1.2) y (1.3), <u>y sea</u> $\psi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ <u>con</u> $\psi \geq 0$ <u>en</u> Γ. <u>Entonces existe una única</u> $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,\infty}(\Omega)$, <u>tal que</u>

$$\max\,\{\lambda u - F(D^2u,Du,u,x), u-\psi\} = 0, \quad \text{para c.t.} x \in \Omega,$$

<u>supuesto</u> $\lambda \geq \lambda_o$, <u>donde</u> λ_o <u>es una constante que sólo depende de</u> M, θ y Ω".

Para llevar a cabo nuestro propósito emplearemos las etapas ya clásicas en el tratamiento de este tipo de problemas:

(i) estudio de un problema penalizado,

(ii) paso al límite,

(iii) comprobación de que la función límite satisface el Problema (P).

En este primer apartado se estudia con detalle la etapa (i).

Sea, entonces, una familia $\beta_\varepsilon(t)$ de funciones no decrecientes y convexas, de clase C^∞, tales que $\beta_\varepsilon(t) = 0$, si $t \leq 0$ y $\{\beta_\varepsilon\}_\varepsilon$ converge, en el sentido de los grafos ([4]), hacia la función multívoca

$$\beta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t < 0, \\ [0,+\infty[, & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Con el fin de precisar podemos, por ejemplo, considerar la siguiente familia

$$\beta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{t-\varepsilon}{\varepsilon}, & \text{si} \quad 2\varepsilon < t < \infty, \\ 0, & \text{si} \quad t \leq 0, \end{cases}$$

y $0 < \beta_\varepsilon(t) < 1$, $0 \leq \beta_\varepsilon'(t) \leq \frac{1}{\varepsilon}$, si $0 < t < 2\varepsilon$.
(obsérvese que β_ε verifica la relación

$$(1.4) \qquad |t\,\beta_\varepsilon'(t) - \beta_\varepsilon(t)| \leq \text{cte}$$

que se empleará más adelante).

Consideremos ahora el siguiente problema completamente no lineal.

$$(P_\varepsilon)\quad\begin{cases}\lambda u-F(D^2u,Du,u,x)+\beta_\varepsilon(u-\psi)=0, & x\in\Omega\\ u(x)=0 & x\in\Gamma\end{cases}$$

donde $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$, y satisface la condición de compatibilidad en la frontera anteriormente señalada.

Claramente, el problema (P_ε) podría ser formulado mediante

$$F_o(D^2u,Du,u,x) = F(D^2u,Du,u,x) - \beta_\varepsilon(u-\psi),$$

con lo que la ecuación (P_ε) caería dentro del campo de aplicación del siguiente resultado.

<u>Teorema 1.2</u>. (L.C. Evans - P.L. Lions |40|). "<u>Bajo las hipótesis</u> (1.1), (1.2) <u>y</u> (1.3) <u>existe una única solución</u> $u \in C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$ (para toda $0 < \alpha < 1$) <u>de</u>

$$(\tilde{P})\quad\begin{cases}\lambda u - F(D^2u,Du,u,x)=0 & x\in\Omega,\\ u(x)=0 & x\in\Gamma,\end{cases}$$

<u>supuesto</u> $\lambda \geq \hat{\lambda}_o$, <u>donde la constante</u> $\hat{\lambda}_o$ <u>depende únicamente de</u> Ω, θ y M".

Aunque $F_o(D^2u,Du,u,x)$ verifica las hipótesis del teorema 1.2, sin embargo la constante correspondiente en (1.2) sería $M + \frac{c}{\varepsilon}$, con lo que el valor $\hat{\lambda}_o$ correspondiente al nuevo problema dependería de $M + \frac{c}{\varepsilon}$. Además, según la referencia citada tal dependencia es creciente. La dificultad que esto acarrearía en la etapa de paso al límite, podría ser infranqueable por lo que aquí se propone la posibilidad de estudiar (P_ε) adaptando la demostración de L.C. Evans - P.L. Lions |40| para $(\tilde{P})$, sin agrupar la parte penalizada, y sobre todo siguien do la pista a las constantes para que la nueva $\hat{\lambda}_o$ permanezca acotada cuando se haga $\varepsilon \searrow 0$.

En concreto, obtendremos el siguiente resultado

Teorema 1.3. "Bajo las hipótesis del teorema 1.2 y considerando $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$, para cada $\varepsilon > 0$, existe una constante $\hat{\lambda}_o^\varepsilon$, tal que

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \lambda u_\varepsilon - F(D^2u_\varepsilon, Du_\varepsilon, u_\varepsilon, x) + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi) = 0 & x \in \Omega \\ u_\varepsilon(x) = 0 & x \in \Gamma \end{cases}$$

tiene una única solución $u_\varepsilon \in C^{3,\gamma}(\bar{\Omega})$ (para todo $0 < \gamma < 1$), supuesto $\lambda \geq \hat{\lambda}_o^\varepsilon$, donde $\hat{\lambda}_o^\varepsilon$ tiene la propiedad de que $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \hat{\lambda}_o^\varepsilon$ es una constante que depende sólo de M, θ, Ω y N.

Con el fin de simplificar la demostración veamos antes algunos lemas técnicos.

Lema 1.1. "Supongamos (1.1), (1.2), (1.3), $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ y sea $u \in C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$ verificando (P_ε), entonces

$$\|\lambda u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \qquad \|\lambda\, D^2 u\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C$$

donde C es independiente de λ, ε, para λ suficientemente grande".

Demostración.- La ecuación de (P_ε) puede escribirse en la forma

$$(1.5) \quad \lambda u - \left|\int_o^1 \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} (tD^2u, tDu, tu, x)\,dt\right| u_{x_i x_j} - \left|\int_o^1 \frac{\partial F}{\partial q_i} (tD^2u, tDu, tu, x)\,dt\right| u_{x_i} - \left|\int_o^1 \frac{\partial F}{\partial r} (tD^2u, tDu, tu, x)\,dt\right| u + \beta_\varepsilon(u - \psi) = F(0,0,0,x), \quad \forall x \in \Omega$$

(en lo que sigue y con el fin de simplificar la notación designaremos por $\tilde{L}^u u$ a la expresión diferencial anterior).

Sin perdida de generalidad supondremos también

$$\frac{\partial F}{\partial r}(p,q,r,x) \leq 0, \quad \text{para todo} \quad p,q,r,x,$$

pues en caso contrario consideraríamos

$$\lambda' u - F'(D^2u,Du,u,x)$$

para $F'(p,q,r,x) = F(p,q,r,x) - Mr$, $\lambda' = \lambda - M$.

Entonces, la hipótesis de elipticidad (1.1) y el principio del máximo determinan

$$\|\lambda u\|_\infty \leq M, \qquad \forall\lambda.$$

Veamos ahora como $\lambda|Du|\big|_\Gamma \leq c$.

Para ello escojamos cualquier punto $x^* \in \Gamma$. La regularidad de la frontera permite suponer la condición de "esfera uniforme exterior", luego tras un cambio de coordenadas, si ello fuera necesario, se reduce a la siguiente situación

$$x^* = (0,0,\dots,0,R); \qquad B(0;R)\cap\Gamma = \{x^*\}$$

para algún $R > 0$ fijo.

Consideremos ahora la función

$$v(x) \equiv \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{1}{R^p} - \frac{1}{|x|^p}\right)$$

donde μ , p son constantes positivas por determinar.

Después de algunos cálculos (v es una función barrera, luego $L^v v \leq -1$), se tiene

$$F(D^2v,Dv,v,x) = L^v v + F(0,0,0,x) \leq F(0,0,0,x)$$

si p es suficientemente grande. Por otro lado

$$|F(0,0,0,x)| = |F(0,0,0,x) - F(0,0,0,x^{**})| \leq M|x-x^{**}|$$

donde $x^{**} \in \Gamma$ pertenece al segmento $\overline{0x}$, $|x^{**}| \geq R$.

Además

$$\lambda v(x) \geq \lambda(v(x) - v(x^{**})) = \mu(\frac{1}{|x^{**}|^p} - \frac{1}{|x|^p}) = \frac{\mu}{|x^{**}|^p}(\frac{1}{\alpha^p} - 1)$$

donde $x^{**} = \alpha x$, $\frac{R}{\dim(\Omega)} \leq \alpha < 1$,

$$\lambda v(x) \geq \mu\, C(1-\alpha)|x| = \mu\, C\, |x-x^*|$$

para alguna constante $C > 0$, y por tanto para μ suficientemente grande

$$\lambda v(x) \geq F(0,0,0,x) \geq F(0,0,0,x) - \beta_\varepsilon(v-\psi), \qquad x \in \Omega,$$

es decir,

$$\lambda(v-u) - (F(D^2v,Dv,v,x) - F(D^2u,Du,u,x)) + (\beta_\varepsilon(v-\psi) - \beta_\varepsilon(u-\psi)) \geq 0$$

El principio del máximo y la monotonía de β_ε implican

$$u \leq v \quad \text{en} \quad \overline{\Omega}$$

Como $u(x^*) = v(x^*)=0$, se tiene $\frac{\partial u}{\partial n}(x^*) \geq \frac{\partial v}{\partial n}(x^*) \geq -\frac{C}{\lambda}$.
(Obsérvese que $\vec{n}(x^*) = (0,0,\ldots,0,-1)$); de manera análoga se obtendría una cota superior.#

El lema anterior es una adaptación de un resultado de L.C. Evans-P.L. Lions |40| establecido para $\beta_\varepsilon \equiv 0$.

<u>Lema 1.2</u>. <u>Bajo las hipótesis de lema</u> 1.1

$$\|\lambda\, Du\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0$$

donde C_o depende de M, θ, N y Ω".

Demostración.- Siguiendo una idea clásica emplearemos la función auxiliar

$$w = |\nabla u|^2 + \eta\, n^2, \quad \text{donde } \eta \text{ será escogida adecuadamente } (^5)$$

Supongamos $\max_{\overline{\Omega}} (|\nabla u|^2 + \eta\, u^2) \geq \max_{\overline{\Omega}} (|\nabla\psi|^2 + \eta\, \psi^2)$ pues en caso contrario ya estaría acabada la demostración del lema.

Para simplificar la expresión emplearemos v_i, β, $\tilde{L}v$, $f(x)$ en lugar de v_{x_i}, β_ε, $\lambda v - L^u v$ y $F(0,0,0,x)$, respectivamente.

Claramente, la idea es estimar $w = |\nabla u|^2 + \eta\, n^2 = u_i u_i + \eta\, u^2$ mediante el principio del máximo.

Calculemos

$$w_\mu = 2u_i\, u_{i\mu} + 2\,\eta\, u\, u_\mu$$

(1.6)

$$w_{\mu\tau} = 2u_{i\tau}\, u_{i\mu} + 2u_i\, u_{i\mu\tau} + 2\,\eta\, u_\tau\, u_\mu + 2\,\eta\, u\, u_{\mu\tau}$$

Diferenciando

(1.7) = (1.5) $$\tilde{L}u + \beta(u-\psi) = f$$

obtenemos

(1.8) $$\tilde{L}\, u_i + \beta'(u-\psi).(u_i-\psi_i) = f_i + \hat{D}^2\, u$$

donde

$$\hat{D}^2 u = \sum_{|\alpha|\leq 2} \sigma_\alpha\, D^\alpha u, \quad \text{con } \sigma_\alpha \text{ acotados.}$$

Teniendo en cuenta (1.6) calculemos $\tilde{L}\, w$

$$\tilde{L}w = -2\, a_{\mu\tau}\, u_{i\mu}\, u_{i\tau} - 2u_i\, a_{\mu\tau}\, u_{i\mu\tau} - 2\,\eta\, a_{\mu\tau}\, u_\mu\, u_\tau$$

$$- 2 \eta u a_{\mu\tau} u_{\mu\tau} - 2 u_i b_\mu u_{i\mu} - 2 \eta u b_\mu u_\mu + e u_i u_i + \eta e u^2$$
$$\leq -2 \theta u_{i\mu} u_{i\mu} - 2 \theta\eta u_\mu u_\mu + 2 u_i \tilde{L} u_i + 2 \eta u \tilde{L}u$$

donde a, b y e, son los coeficientes del operador $\tilde{L}$.

Pero (1.7) y (1.8) conducen a

$$\tilde{L}w \leq -2 \theta u_{ij} u_{ij} - 2 \theta \eta u_i u_i + 2u_i f_i + 2u_i \hat{D}^2 u + 2 \eta u f$$
$$- 2 u_i \beta'(u-\psi)(u_i-\psi_i) - 2 \eta u \beta(u-\psi)$$

Como $|2 u_i \hat{D}^2 u| \leq \theta u_{ij} u_{ij} + C u_i u_i$, y puesto que $|\eta u| \leq C$ (lema 1.1), obtenemos para η suficientemente grande, dependiendo sólo de C

(1.9) $$\tilde{L}w \leq C - J,$$

donde

$$J = 2 \eta u \beta(u-\psi) + 2 \beta'(u-\psi) . u_i(u_i-\psi_i)$$

Supongamos que el máximo de w en $\overline{\Omega}$ es alcanzado en $x^\circ \in \Omega$ (en caso contrario el lema 1.1 concluye el resultado buscado). Entonces

(1.10) $$u_i u_i + \eta u^2 \geq \psi_i \psi_i + \eta \psi^2 \quad \text{en } x^\circ,$$

luego por (1.4)

$$J \geq 2 \beta'(u-\psi)u_i(u_i-\psi_i) + 2 \eta u \beta'(u-\psi)(u-\psi)-C$$

Además

$$2 u_i(u_i-\psi_i) \geq u_i u_i - \psi_i \psi_i$$
$$2 u(u-\psi) \geq u^2 - \psi^2$$

con lo que

$$J \geq \beta'(u-\psi)\ (u_i\, u_i - \psi_i\, \psi_i + \eta\, u^2 - \eta\, \psi^2) - C$$

Entonces, por (1.10), $J \geq -C$ en x°. Es decir, por (1.9)

$$\tilde{L}\, w(x^\circ) \leq C$$

Pero como w alcanza su máximo en x°

$$\tilde{L}\, w(x^\circ) \geq \lambda\, w(x^\circ)$$

y por tanto $\lambda\, w(x^\circ) \leq C$. #

El lema anterior está inspirado en las técnicas de L.C. Evans-A. Friedman |41|.

El resultado que a continuación se cita es clave en la prueba del teorema 1.3.

Lema 1.3. "Bajo las hipótesis del lema 1.1, para cada $\varepsilon > 0$, existen $\hat{\lambda}_o^\varepsilon > 0$ y $0 < c_1 < c_2$, tales que si $u \in C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$ resuelve (P_ε), para $\lambda \geq \hat{\lambda}_o^\varepsilon$, y $||u||_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C_2$, entonces

$$||u||_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C_1$$

Además, $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \hat{\lambda}_o^\varepsilon$ es una constante positiva".

Con el fin de simplificar la demostración del lema 1.3 enunciemos un resultado técnico previo.

Lema 1.4. "*Supongamos* $u \in C^{3,\gamma}(\overline{\Omega})$, *para algún* $0 < \gamma < 1$, *verificando*

$$(1.11) \qquad \begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \Gamma \end{cases}$$

para algún $f \in W^{1,p}(\Omega)$. *Entonces, para cada* $1 < p < \infty$ *y* $0 < \beta < 1$, *y fijada una cantidad* $A \in |-(\theta N)^{\frac{N}{\beta}} + \infty|$, *existen* C *y* ν *constantes dependientes sólo de* M, θ, p, β, A *y* Ω, *tales que*

$$\|u\|_{W^{3,p}(\Omega)} \leq C(\|u\|^{\nu}_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} + A)\ \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demostración del lema 1.3.- Sea β suficientemente pequeño y p adecuadamente grande para que

$$0 < \beta < \alpha = 1 - \frac{N}{p}$$

De la expresión (P_ε) y de los lemas 1.4 y 1.1 obtenemos

$$\|u\|_{W^{3,p}} \leq C(\|u\|^{\nu}_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} + A)\ \|\lambda u + \beta_\varepsilon(u-\psi)\|_{W^{1,p}} \leq$$

$$\leq C\ K_\varepsilon(\|u\|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} + A),$$

donde $C\ K_\varepsilon$ podemos escribirlo en la forma $\dfrac{\varepsilon\ \tilde{C} + \tilde{C}}{\varepsilon}$.

Por el teorema de Morrey (véase ejemplo D. Gilbarg - N.S. Trudinger |47|) se tiene

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\ K_\varepsilon(\|u\|^{\nu}_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} + A)$$

y empleando argumentos de interpolación (véase por ejemplo A. Friedman |43|)

$$(1.12)\qquad \|u\|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|^{1-\rho}_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}\ \|u\|^{\rho}_{\infty}\ , \quad \text{para algún} \quad 0 < \rho < 1,$$

se llega a

$$(1.13)\qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\ K_{\varepsilon}(\|u\|^{\nu(1-\rho)}_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}\ \|u\|^{\rho\nu}_{\infty} + A)$$

$$\leq C\ K_{\varepsilon}(\ \frac{\|u\|^{\nu(1-\rho)}_{C^{2,\alpha}}}{\lambda^{\rho\nu}} + A),$$

recordando el lema 1.1. (Obsérvese que las constantes C, K, ν, ρ y A no dependen de λ).

Consideremos ahora

$C_1 = C_e + (C\ K_{\varepsilon})^{-1}$, donde C_e es una constante positiva, suficientemente grande, que no dependa de ε (se puede pensar en las que obtendrán en el lema 2.2), con lo que

$$C_1 = C_e + (\frac{\varepsilon}{\varepsilon\ \tilde{C} + \tilde{C}})$$

y sea $C_2 = C_1 + 1$, luego sin perdida de generalidad podemos suponer

$$C_2 = C_1 + 1 < 2\ C_1 < (C_e + 1)\ C_1 < C_1^2$$

sin más que considerar C_e suficientemente grande.

Claramente, por (1.13) la prueba acaba si

$$C\ K_{\varepsilon}(\ \frac{C_2^{\nu(1-\rho)}}{\lambda^{\rho\nu}} + A) \leq C_1\ ,$$

y por tanto, si conseguimos

$$(1.14) \qquad \frac{C_1^{2\nu(1-\rho)}}{\lambda^{\rho\nu}} + A \leq (C\ K_\varepsilon)^{-1}\ C_1.$$

Finalmente, considerando que se ha tomado $A = -C_o$, con $0 < C_o < (\theta N)^{\frac{N}{\beta}}$ en la aplicación del lema 1.4 a (P_ε), obtenemos (1.14) si

$$\lambda^{\rho\nu} \geq \frac{C_1^{2\nu(1-\rho)}}{(CK_\varepsilon)^{-1} C_1 + C_o},$$

y por la definición de C_1,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow o} \frac{C_1^{2\nu(1-\rho)}}{(CK_\varepsilon)^{-1}\ C_1 + C_o} = \frac{C_e^{2\nu(1-\rho)}}{C_o} \quad \text{(no dependiente de } \varepsilon).$$

Veamos ahora la demostración del lema 1.4, que debido a su longitud sólo esquematizaremos.

<u>Esquema de la demostración del lema 1.4</u>. Diferenciando (1.11), observamos que $v = u_\xi$ verifica

$$(1.15) \qquad \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} (D^2u, Du, u, x)\ v_{x_i x_j} + \frac{\partial F}{\partial q_i} (D^2u, Du, u, x) v_{x_i} +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial r} (D^2u, Du, u, x) v = f_\xi - \frac{\partial F}{\partial \xi} (D^2u, Du, u, x)$$

donde el segundo miembro pertenece a $L^p(\Omega)$.

La acotación que pretendemos es una consecuencia de la teoría lineal.

"<u>Sea</u> $\hat{v}$ <u>una solución de</u>

$$(1.16) \qquad \begin{cases} L\hat{v} = \hat{f} & \text{en} \quad B(R), \\ \hat{v} = 0 & \text{en} \quad \partial B(R), \end{cases}$$

donde L es un operador diferencial lineal elíptico de segundo orden en forma no divergencia, con coeficientes diferenciales acotados, y B(R) es alguna bola de radio R. Entonces se tiene la estimación

(1.17) $$\|D^2\hat{v}\|_{L^p B(R)} \leq C(\|\hat{f}\|_{L^p B(R)} + \|\hat{v}\|_{W^{1,p} B(R)})$$

supuesto $R^\beta \|a_{ij}\|_{C^\beta(\overline{B(R)})} = \varepsilon'$, para alguna constante ε' pequeña pero fija". (la anterior estimación se obtiene por una perturbación estandar de los coeficientes, que conduce a la estimación correspondiente para el operador Δ (ver .A. Ladyženskaya - N.N. Ural'ceva |59|).

Cubramos ahora $\overline{\Omega}$ con $K = C\left|\left\|\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(D^2u, Du, u, x)\right\|_{C^\beta(\overline{\Omega})}^{\frac{N}{\beta}} + A\right|$ bolas B_k de radio $\frac{R}{2}$, con $R^\beta \left\|\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(D^2u, Du, u, x)\right\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} = \varepsilon'$, para alguna constante ε', fija pero pequeña. (Obsérvese que sobre A lo único que debemos exigirle es que $A + \left\|\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}\right\|^{N/\beta}$ sea una cantidad positiva).

Escojamos ahora unas funciones ρ_k, tales que

$$\begin{cases} \rho_k = 1 \text{ en } B_k \\ \rho_k = 0 \text{ cerca de } \partial(2B_k) \quad (2B_k \text{ es la bola concéntrica a } B_k \text{ y radio } R) \\ |D\rho_k| \leq \frac{C}{R}, \quad |D^2\rho_k| \leq \frac{C}{R^2} \end{cases}$$

y hagamos

$$\eta_k = \rho_k \left|\sum_{\ell=1}^{k} \rho_\ell\right|^{-1}$$

obteniendo una partición de la unidad en Ω. Finalmente definamos

$$\hat{v}_k = \eta_k \; v \qquad \text{en} \qquad 2B_k$$

que verifican

$$\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} (D^2u, Du, u, x)\; \hat{v}_{k_{x_i x_j}} + \frac{\partial F}{\partial q_i} (D^2u, Du, u, x)\; \hat{v}_{k_{x_i}} +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial r} (D^2u, Du, u, x)\; \hat{v}_k = \eta_k \left(f_\xi - \frac{\partial F}{\partial \xi} (D^2u, Du, u, x)\right) +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} (D^2u, Du, u, x) \left| v_{x_i} \; \eta_{k_{x_j}} + v_{x_j} \; \eta_{kx_i} + v \; \eta_{k\, x_i x_j} \right| + \tag{1.18}$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial q_i} (D^2u, Du, u, x)\; v \; \eta_{kx_i} \equiv \hat{f}_k .$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que aquellas bolas B_k que corten a Γ estan de hecho centradas en algún punto de Γ.

Entonces, si $B_k \subset \Omega$, para cualquier $k = 1, 2, \dots, K$, empleamos la estimación (1.17) para (1.18).

Si $B_k \cap \Gamma = \phi$, tras un cambio de coordenadas se reduce al caso $B_k \cap \Gamma \subset \{x_n = 0\}$, y reflejando $\hat{v}_k$ sobre el plano x_n, supuesto $\hat{v}_k = 0$ en $\{x_n = 0\}$, donde

$$\hat{v}_k \text{ reflejada } (x) = \begin{cases} \hat{v}_k(x), & \text{si} \quad x_N \geq 0 \\ -\hat{v}_k(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N), & \text{si} \quad x_N < 0, \end{cases}$$

siempre podemos aplicar la estimación (1.17) a la expresión (1.18). Este método permite estimar $\| u_\xi \|_{W^{2,p}(B_k)}$ para $\xi = x_1, \dots, x_{N-1}$. La restante derivada respecto de x_{NNN} se estima directamente de (1.15).

Coleccionando ahora las anteriores estimaciones se tiene

$$\|D^2 v\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{K} \|D^2 \hat{v}_k\|_{L^p(2B_k)} \leq$$

$$\leq \frac{C\,K}{R^2} \left(\|f_\xi - \frac{\partial F}{\partial \xi}\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \right),$$

recordando la definición de K y empleando argumentos de interpolación se concluye la prueba.#

El lema 1.4 reescribe el lema 6.2 de L.C. Evans - P.L. Lions |40| con una mayor precisión en las constantes de la estimación.

Trás el fuerte aparato técnico de los lemas anteriores estamos ya en condiciones de resolver el problema (P_ε), principal objetivo de este apartado.

<u>Demostración del Teorema 1.3</u>. Sean $0 < \alpha < 1$, $0 < c_1 < c_2$ y $\hat{\lambda}_o^\varepsilon$ como en el lema 1.3. Veamos como (P_ε) admite una solución $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ cuando $\lambda \geq \hat{\lambda}_o^\varepsilon$, y argumentando por enfundadura (6) se tendrá entonces $u \in C^{3,\gamma}(\overline{\Omega})$ para todo $0 < \gamma < 1$.

Para cada $t \in [0,1]$ consideremos el problema

$$(P_\varepsilon^{\,t}) \begin{cases} \lambda u^t - F_t(D^2 u^t, Du^t, u^t, x) + t\beta_\varepsilon(u^t - \psi) = 0, & x \in \Omega \\ u^t(x) = 0, & x \in \Gamma, \end{cases}$$

donde $F_t(D^2 v, Dv, v, x) \equiv (1-t)\,\Delta v + t\,F(D^2 v, Dv, v, x)$, y empleemos el método de continuidad para resolver (P_ε) (7).

Definamos $T \equiv \{t \in [0,1] : (P_\varepsilon^t)$ tiene solución u^t, $\|u^t\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_1\}$.

La teoría estandar (véase, por ejemplo, D. Gilbarg - N.S. Trudinger |47|) implica la unicidad de las soluciones u^t de (P_ε^t), con $\|u^t\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_1$. Claramente $0 \in T$ y $u^\circ \equiv 0$.

También es claro que T es cerrado, pues si $\{t_m\}_m \subset T$, $t_m \longrightarrow t_o$, entonces como $\|u^{t_m}\|_{C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})}$ está acotado

$$u^{t_i} \longrightarrow u^{t_o} \quad \text{en} \quad C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$$

y

$$\|u^{t_o}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \liminf_m \|u^{t_m}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_1 .$$

Finalmente veamos como T es abierto en la topología usual inducida en $[0,1]$, con lo que T será todo el intervalo y (P_ε^t) tendrá solución $\forall t \in [0,1]$. Para ello consideremos la aplicación

$$G(t,u) : [0,1] \times C_o^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega})$$

definida por

$$G(t,u) \equiv \lambda u - F_t(D^2u, Du, u, x) + t\ \beta_\varepsilon(u-\psi)$$

que es continua. Además, fijado (t,u), la derivada Frechet en u

$$G_u(t,u) \equiv \lambda v-(1-t)\,\Delta v - t \left[\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} (D^2u, Du, u, x) v_{x_i x_j} + \frac{\partial F}{\partial q_i} (D^2u, Du, u, x) v_{x_i}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial r} (D^2u, Du, u, x) v\right] + t\ \beta_\varepsilon'(u-\psi) v$$

es un isomorfismo de acuerdo con la teoría estandar para ecuaciones lineales elípticas con coeficientes continuamente holderianos (ver D. Gilbarg - N.S. Trudinger |47|).

Observemos también la continuidad de la aplicación

$$(t,u) \longrightarrow G_u(t,u).$$

Por tanto, dado cualquier $t_o \in T \cap]0,1[$, por el teorema de la función implícita, existe $\varepsilon > 0$ y una <u>aplicación continua</u> $v : (t_o-\varepsilon,\ t_o+\varepsilon) \longrightarrow C_o^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que

$$G(t,v(t)) \equiv G(t_o,u^{t_o}) = 0$$

con lo que $v(t) \equiv u^t$ resuelve (P_ε^t).

Además, como $\|u^{t_o}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_1$, entonces $\|u^t\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} < C_2$ para $|t-t_o| < \varepsilon'$, con ε' suficientemente pequeño. El lema 1.3 implica entonces $\|u^t\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} < C_1$, es decir $]t_o-\varepsilon,\ t_o+\varepsilon[\subset T$. #

§2. <u>PASO AL LIMITE</u>

2.1. <u>Estimaciones en $W^{2,\infty}(\Omega)$</u>.

Para resolver el problema (P), el siguiente paso es hallar el límite de las soluciones u_ε del problema penalizado (P_ε) cuando $\varepsilon \downarrow 0$. Una idea sencilla es acotar estas soluciones u_ε uniformemente por una constante no dependiente de ε y deducir por el teorema de Arcoli-Arzelá la convergencia en algún sentido de alguna subsucesión.

En el lema 1.3 habíamos obtenido unas acotaciones, pero estas dependían de ε por lo que nos vemos obligados a seguir un camino más tortuoso.

Con el fin de simplificar la expresión emplearemos la notación de la demostración del lema 1.2; además por regularización podemos suponer que a_{ij} (coeficientes diferenciales de segundo orden de $\tilde{L}^u$) pertenecen a $C^\infty(\bar{\Omega})$, con $\|a_{ij}\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ acotados con lo que resultados clásicos determinan $u_\varepsilon \in C^4(\bar{\Omega})$.

<u>Lema 2.1</u>. "<u>Bajo las hipótesis del lema 1.1, y con las consideraciones anteriores</u>,

$$|D^2 u_\varepsilon(x)| \leq c + c\, \|D^2 u_\varepsilon\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)} \quad , \quad \forall x \in \Gamma.$$

(donde c representa una constante independiente de ε)".

<u>Demostración</u>. Adaptemos a nuestro caso una técnica inicialmente debida a J.J. Kohn y L. Nirenberg y desarrollada en P.L. Lions |62|. Prescindamos del subíndice ε. Sea $x \in \Gamma$, que mediante una transformación adecuada podemos suponer en la siguiente situación: $x = 0$, $\Omega \subset \{X_N > 0\}$ y existe un entorno V de 0, contenido en Γ tal que $V \subset \{X_N = 0\}$.

Consideremos $Q = \{|x'| < \delta,\ 0 < X_N < h = B^{\frac{1}{2}}\}$, con $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ y $B = \|D^2 u_\varepsilon\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}$, con lo que se puede suponer $Q \subset \Omega$.

De la expresión (1.8) para $1 \leq i \leq N-1$ obtenemos

$$|\hat{L}\, u_i + \beta'(u-\psi)\,.\,(u_i - \psi_i)| \leq c + c\, B^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

donde $\hat{L}\,\phi = -a_{ij}\,\phi_{ij} - (c+\lambda)\phi$.

Sea $q > 0$ tal que $q\delta^2 \geq 1$, se define

$$w = 2\, B^{\frac{1}{2}}\, X_N - B^{3/4}\, X_N^{3/2} + q \sum_{j<N-1} |x_j| + \|\psi_i\|_\infty$$

que verifica (se puede suponer B tan grande como lo necesitemos)

$$w \geq 1 \quad \text{en} \quad \Omega \cap \partial Q, \qquad w \geq 0 \quad \text{en} \quad \overline{Q}$$

$$\tilde{L}w \geq c_o\, B + c_o, \qquad \text{con} \qquad 0 < c_o < 1$$

lo que permite escribir

$$(2.2) \qquad \left| \begin{array}{l} \tilde{L}\, \frac{c\, w}{c_o} + \beta'(u-\psi)\left(\frac{c\, w}{c_o} - \frac{c\, w}{c_o}\right) \geq c\, B + c \\[2ex] \frac{c\, w}{c_o} \geq 0 = u_i \quad \text{sobre} \quad \overline{Q} \cap \Gamma; \quad \frac{c\, w}{c_o} \geq c > u_i \quad \text{sobre} \quad \partial Q \cap \Omega \\[2ex] w \geq \psi_i \end{array} \right.$$

Deduzcamos entonces $|u_i| \leq \frac{c\, w}{c_o}$ sobre Q; para verlo sea $x^\circ \in \overline{Q}$ tal que en él $\frac{c\, w}{c_o} - u_i$ alcance un mínimo negativo estricto. Necesariamente de (2.2) se deduce que $x^\circ \in Q$, y entonces por el principio del máximo

$$0 > \tilde{L}\left(\frac{c\, w}{c_o} - u_i\right)(x^\circ) + \beta'(u-\psi)(x^\circ)\left(\frac{c\, w}{c_o} - u_i\right)(x^\circ) = \tilde{L}\, \frac{c\, w}{c_o}\, (x^\circ) +$$

$$+ \beta'(u-\psi)(x^\circ)\left(\frac{c\, w}{c_o} - \frac{c\, w}{c_o}\right)(x) - \tilde{L}\, u_i(x^\circ) - \beta'(u-\psi)(x^\circ)u_i(x^\circ) +$$

$$+ \beta'(u-\psi)(x^\circ)\, \frac{c\, w}{c_o}\, (x^\circ)$$

y teniendo en cuenta (2.1) y (2.2)

$$\geq c\, B + c - \hat{L}\, u_i(x^\circ) - \beta'(u-\psi)(x^\circ)(u_i-\psi_i) \geq 0$$

lo que determina una contradicción.

Por tanto $|u_i| \le \frac{c\,w}{c_o}$ en Q, con lo que

(2.3) $$|u_{iN}(0)| \le \frac{c}{c_o} w_N(0) = \frac{2c}{c_o} B^{\frac{1}{2}}.$$

Por otra parte, para $i,j \le N-1$, se tiene evidentemente $u_{ij}(0) = 0$. Finalmente, la expresión (1.7) en el punto $x = 0$ conduce a

$$u_{NN}(0) = \frac{1}{a_{NN}(0)} \left[-\sum_{j=1}^{N-1} 2a_{jN}(0)\, u_{jN}(0) - b_N(0)\, u_N(0) - f(0) \right]$$

(obsérvese que $\beta_\varepsilon(u(0) - \psi(0)) = \beta_\varepsilon(-\psi(0)) = 0$, debido a la condición de compatibilidad $\psi \ge 0$ sobre Γ) con lo que acabamos la demostración a partir de (2.3) y del lema 1.1.#

Consideremos ahora la estimación $W^{2,\infty}$ en el interior. Esencialmente, consiste en derivar dos veces la ecuación (1.7) respecto a un número suficiente de "direcciones" y aplicar entonces el principio del máximo. La idea de derivar dos veces una ecuación con una no linealidad convexa fue utilizada por primer vez por H. Brézis - D. Kinderlehrer [20] y más adelante por varios autores en diversos problemas no lineales. En nuestro caso, tal estimación se sigue del siguiente resultado

<u>Lema 2.2</u>. (P.L. Lions [62]). <u>Bajo las hipótesis del lema 2.1.</u>

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \le C \text{ (independiente de } \varepsilon),$$

<u>donde</u> u_ε <u>es una función que verifica</u> (1.5) <u>para</u> $\lambda \ge \lambda_o$ (constante dependiente sólo de M y θ)".#

En realidad el lema 2.2 está demostrado para un sistema de inecuacio nes variacionales, sin embargo sirve totalmente para nuestros propósitos. En concreto, basta suponer $\|u_\varepsilon\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} > \|\psi\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$. pues en caso contrario la estimación sería evidente, y considerar $u^1 = u_\varepsilon$ y $u^2 = \psi$ en la demostración referida. La derivación respecto de un número suficiente de direcciones, que tengan en cuenta los términos que aparecen por derivación de los coeficientes de $\tilde{L}^u$, hace bastante larga y pesada la demostración, por lo que la omitimos.

Con el fin de evitar la dificultad señalada algunos autores imponen la condición de trabajar con operadores con coeficientes constantes, lo que les restringe a estimar en $W^{2,\infty}_{loc}$, este es el caso en L.C. Evans - A. Friedman [41].

2.2. Técnicas de acretividad en el paso al límite

Antes de pasar al límite recordemos algunos hechos de Análisis funcional no lineal que jugaran un papel importante en lo que sigue. En cualquier espacio de Banach real X, dados $x, y \in X$, la aplicación

$$\lambda \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \|x + \lambda y\| \in \mathbb{R}_+ \quad \text{es convexa,}$$

y por tanto la aplicación

$$\lambda \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \quad \text{es creciente,}$$

con lo que tiene sentido definir

$$[x,y]_+ \equiv \inf_{\lambda > 0} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \tag{2.4}$$

(es decir, la derivada por la derecha de la norma en x siguiendo la dirección y).

Además, se verifica:

(1) $|[x,y]_+| \leq \|y\|$

(2) $[x,y+z]_+ = a\|x\| + [x,y]_+$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$,

(3) $[x,y+z]_+ \leq [x,y]_+ + [x,z]_+$

(4) $[,]_+ : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua superiormente.

(5) $[x,y]_+ \geq 0 \iff \|x+\lambda y\| \geq \|x\|$, $\forall a > 0$

Por tanto $[\ ,\ ]_+$ es un producto semiinterior en X (8) (una exposición detallada de la demostración de esas propiedades puede encontrarse en K. Sato [75], Ph. Bénilan [4], [5], etc.).

Consideremos ahora un operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, posiblemente no lineal. Diremos que A es acretivo en X si

$$\|x-y\| \leq \|x-y + \lambda(Ax-Ay)\| , \quad \forall x,y \in D(A), \quad \lambda > 0$$

(con las modificaciones naturales tal definición puede extenderse a operadores multívocos).

Por la propiedad (5) la acretividad de A puede también expresarse mediante

$$[x-y,\ Ax - Ay]_+ \geq 0. \tag{2.5}$$

Diremos que A es m-acretivo, si además $R(I + \lambda A) = X$, $\forall\lambda > 0$ (o, equivalentemente, para algún $\lambda > 0$).

La noción de acretividad y m-acritividad juega un papel importante en el estudio de las ecuaciones de evolución gobernadas por operadores no lineales (para una exposición detallada véase M.G. Crandall-T. Ligget [23], Ph. Bénilan [6], M.G. Crandall [22], V. Barbu [3], L.C. Evans [38], etc.).

Cuando $X = C(\overline{\Omega})$ se tiene la representación

(2.6) $$[f,g]_+ = \max_{\substack{y \in \overline{\Omega} \\ |f(y)|=\|f\|_{C(\overline{\Omega})}}} g(y)\,.\,\mathrm{sign}\, f(y) \qquad (f \not\equiv 0)$$

(para una demostración de la representación anterior véase K. Sato [75], E. Sinestrari [76]). Como se va a ver la caracterización (2.5) es muy útil en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales satisfaciendo un principio del máximo.

<u>Lema 2.3</u>. "<u>Sea</u> $u \in C^2(\overline{\Omega})$, <u>entonces el operador</u> $\tilde{L}^u$, <u>definido en el lema</u> 1.2, <u>con</u> $D(\tilde{L}^u) = \{v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) : \tilde{L}^u v \in C(\overline{\Omega})$, para algún $p > N\}$ <u>es acretivo en</u> $C(\overline{\Omega})$.

<u>Además, el operador</u> $\tilde{L}^u_\varepsilon$ <u>definido por</u> $\tilde{L}^u_\varepsilon v = \tilde{L}^u v + \beta_\varepsilon(v-\psi)$, <u>en</u> $D(\tilde{L}^u)$, <u>es m-acretivo en</u> $C(\overline{\Omega})$, <u>si la función</u> F <u>definida al principio del capítulo es de clase</u> C^3".

<u>Demostración</u>. La acretividad del operador <u>lineal</u> $\tilde{L}^u$ se sigue del principio del máximo J.M. Bony [13]. En efecto, dado $v \in D(\tilde{L}^u)$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $x° \in \Omega$, tal que $v(x°) = \|v\|_\infty$ pues en caso contrario el resultado se sigue

trivialmente de la definición (2.4) entonces el principio de Bony determina

$$\limsup_{x_j \to x^\circ} \text{ess } (\tilde{L}^u v(x)) \geq 0 \qquad (^9)$$

en particular $\tilde{L}^u v$ es contínua se tiene $v(x^\circ) . \tilde{L}^u v(x^\circ) \geq 0$ obteniendose la acretividad en $C(\bar{\Omega})$ sin más que tener en cuenta (2.5) y (2.6).

La m-acretividad de $\tilde{L}^u$ se deduce de la teoría estandar de ecuaciones elípticas si exigimos la regularidad adecuada sobre F (véase D. Gilbarg - N.S. Trudinger [47]). Por otra parte es claro que la monotonía de β_ε determina la acretividad de $\tilde{\beta}_\varepsilon v = \beta_\varepsilon(v-\psi)$, con lo que la lipschitcianidad de β_ε y argumentos estandar de perturbación (ver V. Barbu [3]) concluyen la m-acretividad de $\tilde{L}^u_\varepsilon$.#

<u>Corolario 2.1</u>. "<u>Dados</u> $u,\tilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C_o(\bar{\Omega})$, <u>se verifica</u>

$$0 \leq [u-\tilde{u},\ \lambda(u-\tilde{u}) - (F(D^2u,Du,u,x) - F(D^2\tilde{u},D\tilde{u},\tilde{u},x))]_+$$

$$= [u-\tilde{u},\ \lambda(u-\tilde{u}) - L^{u,\tilde{u}}(u-\tilde{u})]_+ = [u-\tilde{u},\ \lambda(u-\tilde{u}) - (L^u u - L^{\tilde{u}}\tilde{u})]_+,$$

<u>donde</u> $L^{u,\tilde{u}}\, u-\tilde{u} \equiv a^{u,\tilde{u}}_{ij}(u-\tilde{u})_{x_i x_j} + b^{u,\tilde{u}}_i (u-\tilde{u})_{x_i} + c^{u,\tilde{u}}(u-\tilde{u})$

<u>con</u> $$a^{u,\tilde{u}}_{ij}(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}((1-t)D^2\tilde{u} + t\, D^2u,\ (1-t)D\tilde{u} + t\, Du, (t-1)\tilde{u} + + tu,\ x)dt$$

$$b^{u,\tilde{u}}_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial q_i}((1-t)D^2\tilde{u} + t\, D^2u,\ (1-t)D\tilde{u} + t\, Du,\ (1-t)\tilde{u} + + tu,\ x)dt$$

$$c^{u,\tilde u}(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r}\,((1-t)D^2\tilde u + t\,D^2u\ (1-t)D\tilde u + t\,Du,\ (1-t)\tilde u +$$

$$+ tu,\ x)dt$$

y $L^u u$, $L^{\tilde u}\tilde u$ dados en (1.5)".#

La demostración se basa en la igualdad

$$L^u u(x) - L^{\tilde u}\tilde u(x) = F(D^2u,Du,u,x) - F(D^2\tilde u,D\tilde u,\tilde u,x) = L^{u,\tilde u}(u-\tilde u)(x)$$

y en el principio de Bony empleado como en la demostración anterior.

Corolario 2.2. "Los operadores $\lambda u-F(D^2u,Du,u,x)$ y $\lambda u - F(D^2u,Du,u,x) + \beta_\varepsilon(u-\psi)$ definidos en $D = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)\ :\ F(D^2u,Du,u,x) \in C(\overline\Omega)$ para algún $p > N\}$ son acretivos en $C(\overline\Omega)$".#

Estamos ya en condiciones de probar la existencia de soluciones del problema (P).

Demostración de la existencia de soluciones del teorema 1.1

Consideremos una aproximación $\{\psi_\varepsilon\}_\varepsilon$ de ψ, tal que $\psi_\varepsilon \in C^2(\overline\Omega)$, $\psi_\varepsilon \geq 0$ en Γ y $\{\psi_\varepsilon\}_\varepsilon \to \psi$ uniformemente en $\overline\Omega$.

Para cada ε y cada ψ_ε sea u_ε la solución del problema penalizado (P_ε) asegurada por el teorema 1.2, para $\lambda \geq \hat\lambda_0^\varepsilon + \lambda_0$ (10), donde λ_0 es la constante del lema 2.2. Precisamente, por la estimación $W^{2,\infty}$ dada en ese lema es posible extraer una subsucesión de los ε, que seguiremos representando por ε, tal que

$$(2.7) \qquad \begin{cases} u_\varepsilon \longrightarrow v & \text{uniformemente en } \overline{\Omega}, \\ u_\varepsilon \longrightarrow v & \text{debilmente en } W^{2,\infty}(\Omega). \end{cases}$$

Por otro lado, de las estimaciones $W^{2,\infty}$ y de la ecuación

$$\beta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi_\varepsilon) = F(0,0,0,x) - \lambda u_\varepsilon - L^{u_\varepsilon} u_\varepsilon$$

se deduce

$$\beta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \leq c \qquad \text{en} \quad \Omega,$$

y como para $t > 0$ $\beta_\varepsilon(t) \to +\infty$, cuando $\varepsilon \downarrow 0$, encontramos que

$$u_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(x) \uparrow 0, \quad \text{si} \quad \varepsilon \downarrow 0, \quad x \in \Omega$$

es decir, $v \leq \psi$, $\forall x \in \Omega$.

Además, $\lambda u_\varepsilon - F(D^2 u_\varepsilon, Du_\varepsilon, u_\varepsilon, x) \leq 0$, luego la convergencia débil (2.7) conserva esta desigualdad, y así

$$\lambda v - F(D^2 v, Dv, v, x) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Finalmente, para comprobar que v es una solución veamos que

$$(2.8) \qquad \lambda v - F(D^2 v, Dv, v, x) \geq 0 \qquad \text{en} \quad [v < \psi] \quad (^{11})$$

En algunos problemas no cuasilineales la prueba de (2.8) y por tanto el paso al límite se puede hacer empleando argumentos probabilísticos (ver por ejemplo N.V. Krylov [54], [55], ó también P.L. Lions - J.L. Menaldi [64]); sin embargo aquí se emplearan argumentos de acretividad debidos a L.C. Evans [37]).

Consideremos $\phi \in C^2(\Omega) \bigcap C_o(\overline{\Omega})$, por el corolario 2.2 se tiene

$$0 \leq \left[\phi - u_\varepsilon,\ \lambda(\phi - u_\varepsilon) - (F(D^2\phi, D\phi, \phi, x) - F(D^2u_\varepsilon, Du_\varepsilon, u_\varepsilon, x)) + \right.$$
(2.9)
$$\left. + \beta_\varepsilon(\phi - \psi_\varepsilon) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\right]_+ = \left[\phi - u_\varepsilon,\ \lambda\phi - F(D^2\phi, D\phi, \phi, x)\right]_+$$

si ϕ es tal que $\phi \leq \psi_\varepsilon$.

Como $u_\varepsilon \to v$ uniformemente en $\overline{\Omega}$, tomando límites cuando $\varepsilon \to 0$, por la semicontinuidad superior de $[\ ,\ ]_+$, se tiene

(2.10) $$0 \leq \left[\phi - v,\ \lambda\phi - F(D^2\phi, D\phi, \phi, x)\right]_+$$

$\forall \phi \in C^2(\Omega) \cap C_o(\overline{\Omega})$, tal que $\psi > \phi$.

Emplearemos ahora

<u>Lema 2.4</u>. (L.C. Evans [37]). "<u>Si</u> $v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_o^{1,p}(\Omega)$, <u>para algún</u> $p > N$, <u>entonces, para casi todo</u> $x^\circ \in \Omega$ <u>existe una sucesión</u> $\phi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ <u>tal que</u>

i) $\phi_n(x^\circ) \to v(x^\circ)$, $D\,\phi_n(x^\circ) \to D\,v(x^\circ)$, $D^2\,\phi_n(x^\circ) \to D^2\,v(x^\circ)$;

ii) $-(v - \phi_n)(x^\circ) = \|v - \phi_n\|_{C(\overline{\Omega})}$

iii) $0 > (v - \phi_n)(x) > (v - \phi_n)(x^\circ)$, <u>para</u> $x \in \overline{\Omega}$, $x \neq x^\circ$". #

Entonces, para casi todo $x^\circ \in [v < \psi]$, puesto que $\{\phi_n(x^\circ)\}_n$ converge decrecientemente hacia $v(x^\circ)$, existe un n_o a partir del cual

$$v(x^\circ) < \phi_n(x^\circ) < \psi(x^\circ)$$

Por tanto de (2.6) y (2.10) deducimos que para casi todo $x^\circ \in \Omega$ y a partir de un entero positivo

$\lambda\ \phi_n(x^\circ) - F(D^2\phi_n(x^\circ),\ D\ \phi_n(x^\circ),\ \phi_n(x^\circ),\ x^\circ) \geq 0$. Los resultados de convergencia de L.C. Evans [37] concluyen $\lambda v - F(D^2 v, Dv, v, x)$, para casi todo $x^\circ \in [v < \psi]$.

Para ver la unicidad empleamos técnicas de acretividad en $L^\infty(\Omega)$, concluyendose la demostración del teorema 1.1 en la siguiente sección

§3. Unicidad de la solución y otras propiedades

Como se ha mostrado en el apartado anterior al pasar al límite en ε se llega a una función $v \in W^{2,\infty}(\Omega)$, lo que hace necesario emplear nuevas técnicas sobre nuestro problema.

Consideremos ahora el espacio de Banach $L^\infty(\Omega)$, en el que el producto semiinterior (2.4) admite la representación

$$(3.1) \qquad [f,g]_+ \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega(f,\varepsilon)}\ g(x)\,.\,\operatorname{sign} f(x) \qquad (f \not\equiv 0)$$

siendo $\Omega(f,\varepsilon) = \{x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ (para una demostración de la representación anterior se puede consultar K. Sato [75]).

Lema 3.1. (L.C. Evans [37]). "El operador $\lambda u - F(D^2u, Du, u, x)$ definido en $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, para algún $p > N$, es acretivo en $L^\infty(\Omega)$". ∎

La demostración del lema anterior se basa de nuevo en el principio de Bony.

Veamos a continuación algunos resultados de comparación que nos permitirán concluir la unicidad del problema (P).

Lema 3.2. "Sean $u, \tilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$, para algún $p > N$, tales que

$$\begin{cases} \lambda u - F(D^2u, Du, u, x) \leq \lambda\tilde{u} - F(D^2\tilde{u}, D\tilde{u}, \tilde{u}, x), & \text{para casi todo } x \in \Omega \\ u(x) \leq \tilde{u}(x), & \text{para todo } x \in \Gamma. \end{cases}$$

Entonces, $u(x) \leq \tilde{u}(x)$, para todo $x \in \Omega$".

Demostración. Como $u, \tilde{u} \in C(\bar{\Omega})$ existe $x^\circ \in \bar{\Omega}$ en el que $u-\tilde{u}$ alcanza su máximo. Si $x^\circ \in \Gamma$, ó si en x° el máximo es negativo el lema es trivial.

Supongamos por tanto que $(u-\tilde{u})(x^\circ) = \|u-\tilde{u}\|_\infty$ y derivemos una contradicción. En un entorno Ω' de x° en el que $u-\tilde{u}$ sólo tome valores positivos, el principio de Bony

$$\lim_{\substack{x \to x^\circ \\ x \in \Omega'}} \text{ess sup} \; ((\lambda-1)(u-\tilde{u})(x) - L^{u,\tilde{u}}(u-\tilde{u})(x)) \geq 0 \quad (^{13})$$

(recuérdese la notación del corolario 2.1) determina que $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tales que

$$\sup_{B(x^\circ;\delta)\cap\Omega'} \text{ess} \; ((\lambda-1)(u-\tilde{u})(x) - L^{u,\tilde{u}}(u-\tilde{u})(x)) \geq -\varepsilon, \tag{3.2}$$

pero la hipótesis del lema indica $(\lambda-1)(u-\tilde{u}) - L^{u,\tilde{u}}(u-\tilde{u}) \leq -(u-\tilde{u})$, para casi todo punto de Ω, luego

$$\sup_{B(x^\circ;\delta)\cap\Omega'} \text{ess} \; -(u-\tilde{u})(x) \geq -\varepsilon$$

o lo que es lo mismo,

$$(3.3) \qquad \inf_{B(x°;\delta)\cap\Omega'} (u-\tilde{u})(x) \leq \varepsilon$$

Sin embargo, la continuidad de $u-\tilde{u}$ y su valor sobre $\overline{\Omega}'$ permiten encontrar una cantidad ε para la que (3.3) sea imposible.#

<u>Lema 3.3</u>. "<u>Sean</u> $u, u \in W^{2,p}(\Omega)$, <u>para algún</u> $p > N$, <u>y</u> $\psi \in C(\overline{\Omega})$, <u>tales que</u>

$$\begin{cases} \lambda u - F(D^2u, Du, u, x) + \beta_\varepsilon(u-\psi) \leq \lambda\tilde{u} - F(D^2\tilde{u}, D\tilde{u}, \tilde{u}, x) + \beta_\varepsilon(\tilde{u}-\psi), \quad \underline{\text{para}} \\ \hfill \text{c.t. } x \in \Omega \\ u(x) \leq \tilde{u}(x), \quad \underline{\text{para todo}} \quad x \in \Gamma \end{cases}$$

<u>Entonces</u>, $u(x) \leq \tilde{u}(x)$, <u>para todo</u> $x \in \Omega$".

<u>Demostración</u>. Omitamos el subíndice ε y razonemos por contradicción. Como en el lema 3.2 supongamos que existe un $x° \in \Omega$ tal que $(u-\tilde{u})(x°) = \|u-\tilde{u}\|_\infty$. La hipótesis puede escribirse en la forma

$$(3.4) \qquad \lambda(u-\tilde{u}) - (F(D^2u, Du, u, x) - F(D^2\tilde{u}, D\tilde{u}, \tilde{u}, x)) \leq \beta_\varepsilon(\tilde{u}-\psi) - \beta_\varepsilon(u-\psi);$$

luego también puede suponerse que $\tilde{u}(x°) > \psi(x°)$, pues en caso contrario en algún entorno de $x°$ se tendría $\tilde{u}(x) \leq \psi(x)$, con lo que en dicho entorno el miembro de la derecha de (3.4) sería negativo y procediendo como en el lema anterior deduciríamos la contradicción.

Por tanto, consideremos que $u(x°) > \tilde{u}(x°) > \psi(x°) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow u(x°) - \psi(x°) > \tilde{u}(x°) - \psi(x°) > 0 \Longrightarrow \beta(u(x°) - \psi(x°)) >$
$> \beta(\tilde{u}(x°) - \psi(x°))$.

Sea ahora Ω'' un entorno de $x°$ tal que en $\overline{\Omega}''$

$\beta(u(x) - \psi(x)) > \beta(\tilde{u}(x) - \psi(x))$, y apliquemos el razonamiento del lema anterior a $\lambda+1$ en Ω'', llegandose a que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tales que

$$\sup_{B(x^\circ;\delta)\cap\Omega''} \mathrm{ess} \ (\lambda(u-\tilde{u})(x) - L^{u,\tilde{u}}(u-\tilde{u})(x)) \geq -\varepsilon,$$

y por tanto por (3.4)

$$\sup_{B(x^\circ;\delta)\cap\Omega''} \mathrm{ess} \ (\beta(\tilde{u}-\psi) - \beta(u-\psi)) \geq -\varepsilon,$$

es decir,

$$\inf_{B(x^\circ;\delta)\cap\Omega''} (\beta(u-\psi) - \beta(\tilde{u}-\psi)) \leq \varepsilon$$

derivandose una contradicción como en la demostración del lema anterior.#

Estamos ahora en condiciones de probar la unicidad del problema (P).

Continuación de la demostración del teorema 2.1. Veamosla en dos etapas.

a) "La solución v construida por paso al límite es maximal en el conjunto de las soluciones del problema (P)".

En efecto, sea $\hat{u} \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_o^{1,\infty}(\Omega)$ cualquier función verificando (P) y sea u_ε la solución del problema penalizado (P_ε) correspondiente a ψ_ε, para cada $\varepsilon > 0$.

Se tiene la desigualdad [14]

$$\lambda\hat{u} - F(D^2\hat{u},D\hat{u},\hat{u},x) + \beta_\varepsilon(\hat{u}-\psi_\varepsilon) \leq 0 = \lambda u_\varepsilon - F(D^2u_\varepsilon,Du_\varepsilon,u_\varepsilon,x) +$$

$$+ \beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi_\varepsilon),$$

por el lema 3.3 'se concluye $\hat{u} \leq u_\varepsilon$, $\forall x \in \Omega$; finalmente la convergencia uniforme de u_ε hacia v en $\overline{\Omega}$ determina la maximalidad de v.

b) "$\lambda v - F(D^2v,Dv,v,x) \leq \lambda\hat{u} - F(D^2\hat{u},D\hat{u},\hat{u},x)$, $\forall\hat{u} \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_o^{1,\infty}(\Omega)$ verificando (P)".

En efecto,

i) En $[\hat{u} < \psi]$ la anterior desigualdad resulta de que el segundo miembro es nulo.

ii) En $[\hat{u} = \psi]$, como v es maximal $\psi \geq v \geq \hat{u} \Longrightarrow v = \psi = \hat{u}$ y la desigualdad resulta trivial.

Finalmente el lema de comparación 3.2 sobre la desigualdad b) y la maximalidad de v concluyen la unicidad.#

Veamos a continuación algunas propiedades de la solución del problema (P) con respecto al obstáculo, muy ligadas al método de unicidad.

Teorema 3.1. "Sean u y $v \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_o^{1,\infty}$ las soluciones del problema (P) correspondientes a los obstáculos ψ y ϕ. Se verifican las siguientes propiedades:

i) $\|u - v\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|\psi - \phi\|_{C(\overline{\Omega})}$

ii) Si $\psi \leq \phi$ entonces $u \leq v$.

iii) $\|u-\psi\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \frac{1}{\lambda_o} \|\lambda\psi - F(D^2\psi, D\psi, \psi, x)\|_{C(\overline{\Omega})}$".

Demostración

i) Sean u_ε y v_ε las correspondientes soluciones del problema penalizado, que verifican por tanto

$$\lambda(u_\varepsilon - v_\varepsilon) - (F(D^2u_\varepsilon, Du_\varepsilon, u_\varepsilon, x) - F(D^2v_\varepsilon, Dv_\varepsilon, v_\varepsilon, x)) =$$
$$= \beta_\varepsilon(v_\varepsilon - \phi_\varepsilon) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi_\varepsilon)$$

Por medio del corolario 2.1 deducimos

$$[u_\varepsilon - v_\varepsilon,\ \beta_\varepsilon(v_\varepsilon - \phi_\varepsilon) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi_\varepsilon)]_+ \geq 0$$

Finalmente, de la definición (2.6) deducimos que existe un $x^\circ \in \overline{\Omega}$ tal que $|(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(x^\circ)| = \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{C(\overline{\Omega})}$ y

(3.5) $\quad (\beta_\varepsilon(v_\varepsilon-\phi_\varepsilon)(x^\circ) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi_\varepsilon)(x^\circ)) \cdot \text{sign } (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(x^\circ) \geq 0$

Si $x^\circ \in \Gamma$ el resultado es trivial, luego supongamos $x^\circ \in \Omega$ y que $(u_\varepsilon-v_\varepsilon)(x^\circ) > 0$; entonces $\beta_\varepsilon(v_\varepsilon-\phi_\varepsilon)(x^\circ) \geq \beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi_\varepsilon)(x^\circ) \Longrightarrow$ $(v_\varepsilon-\phi_\varepsilon)(x^\circ) \geq (u_\varepsilon-\psi_\varepsilon)(x^\circ) \Longrightarrow (u_\varepsilon-v_\varepsilon)(x^\circ) \leq (\psi_\varepsilon-\phi_\varepsilon)(x^\circ)$.

Si $(u_\varepsilon-v_\varepsilon)(x^\circ) < 0$, de manera análoga se deduce

$$(\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x^\circ) \leq (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(x^\circ) < 0$$

obteniéndose el resultado tras un paso al límite.

ii) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que las aproximaciones ψ_ε y ϕ_ε de los problemas penalizados verifican la desigualdad $\psi_\varepsilon \leq \phi_\varepsilon$.

Procediendo como en el apartado anterior podemos situarnos en el punto (3.5). Si $x^\circ \in \Gamma$ o en él $(u_\varepsilon-v_\varepsilon)(x^\circ)$ toma valor negati vo la comparación es trivial, luego supongamos que $(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(x^\circ) > 0$, entonces procediendo según la monotonicidad de β_ε llegamos a la contradicción

$$0 < (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(x^\circ) \leq \psi_\varepsilon(x^\circ) - \phi_\varepsilon(x^\circ) \leq 0$$

iii) Para obtener la estimación final formemos un problema auxiliar. Sea $\hat{u} = u - \psi$, entonces

$$0 \geq \lambda u - F(D^2u, Du, u, x) = \lambda(u-\psi) - (F(D^2u, Du, u, x) -$$
$$- F(D^2\psi, D\psi, \psi, x)) + \lambda\psi - F(D^2\psi, D\psi, \psi, x).$$

Es decir, teniendo en cuenta los operadores empleados en el corolario 2.1, la función $\hat{u} \in W^{2,\infty}(\Omega)$ verifica

(3.6) $\quad \max\{\lambda\hat{u} - L^{u,\psi}\hat{u} + \lambda\psi - F(D^2\psi, D\psi, \psi, x) \,;\, \hat{u}\} = 0 \quad$ en c.t.x $\in \Omega$

Como $u,\psi \in C(\overline{\Omega})$ la función $-\hat{u}$ realiza un máximo en algún $x^\circ \in \overline{\Omega}$. Si $x^\circ \in \Gamma$ el resultado es trivial (recuérdese $F(D^2\psi, D\psi, \psi, x^\circ) = 0$), luego supongamos que $x^\circ \in \Omega$, y apliquemos el principio de Bony al operador $-\lambda_o(-\hat{u}) + \lambda(-\hat{u}) - L^{\psi,u}(-\hat{u})$,

$$\limsup_{x \to x^\circ} \text{ess } (-\lambda_o(-\hat{u})(x) + \lambda(-\hat{u})(x) - L^{\psi,u}(-\hat{u})(x)) \geq 0$$

es decir, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ \delta > 0$ tales que

$$\sup_{B(x^\circ;\delta)} \text{ess } (-\lambda_o(-\hat{u})(x) + \lambda(-\hat{u})(x) - L^{\psi,u}(-\hat{u})(x)) \geq -\varepsilon$$

Ahora bien $(F(D^2u, Du, u, x) - F(D^2\psi, D\psi, \psi, x)) = -(F(D^2\psi, D\psi, \psi, x) - F(D^2u, Du, u, x))$ luego $L^{u,\psi}\hat{u} = -L^{\psi,u} - \hat{u}$, teniéndose

$$\sup_{B(x^\circ;\delta)} \text{ess} \ (-\lambda_o(-\hat{u})(x) - \lambda\hat{u}(x) + L^{u,\psi}(\hat{u})(x)) \geq -\varepsilon$$

y por tanto

$$\inf_{B(x^\circ;\delta)} \text{ess} \ (\lambda_o(-\hat{u})(x) + \lambda\hat{u}(x) - L^{u,\psi}(\hat{u})(x)) \leq \varepsilon$$

Siempre podemos suponer que $\hat{u}(x) < 0$, $\forall x \in B(x^\circ;\delta)$ (basta con escoger δ adecuadamente pequeño), con lo que entonces de (3.6) se tiene

$$\inf_{B(x^\circ;\delta)} \text{ess} \ (\lambda_o(-\hat{u})(x) - \lambda\psi(x) + F(D^2\psi, D\psi, \psi, x)) \leq \varepsilon,$$

llegándose a

$$-\|\lambda\psi - F(D^2\psi, D\psi, \psi, x)\|_\infty + \inf_{B(x^\circ;\delta)} \lambda_o(-\hat{u})(x) \leq \varepsilon,$$

finalmente la continuidad de $\hat{u}$ concluye la estimación.#

La similitud de la inecuación no cuasilineal,

$$(P) \quad \begin{cases} \max\{\lambda u - F(D^2u, Du, u, x), u-\psi\} = 0, & \text{para casi todo} \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{para todo} \quad x \in \Gamma, \end{cases}$$

o más concretamente su formulación equivalente

$$(3.7) \quad \begin{cases} \max\{\lambda u - L^u u - F(0,0,0,x), u-\psi\} = 0, & \text{para casi todo} \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0, & \text{para todo} \quad x \in \Gamma \end{cases}$$

con las Inecuaciones Variacionales sugiere la posibilidad de estudiar sobre (P) algunas de las propiedades tópicas que aparecen en el estudio de las I.V. (Una exposición detallada de algunas de esas propiedades puede encontrarse en H. Brézis |15|, H. Brézis - D. Kinderlehrer |20|, A. Bensoussan - J.L. Lions |10|, |11|, entre otros).

Sin embargo el problema (P) presenta algunas desventajas: (i) está gobernado por un operador con una no linealidad general; (ii) no admite una formulación en términos variacionales.

A la primera desventaja se puede responder con la formulación (2.7), en la que los coeficientes del operador lineal elíptico L^u dependen de la solución; a la segunda sólo podremos oponer el producto semiinterior $[\ ,\ ]_+$ frente a las propiedades de toda forma bilineal.

En cualquier caso siempre existirá una ayuda final consistente en la interpretación probabilística del problema (P), lo que pone de manifiesto los comentarios hechos en la introducción.

Sin embargo, tal interpretación no es aquí tan clara como en las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman estudiadas en el primer capítulo. En efecto, los coeficientes del operador L^u dependen como hemos indicado de la solución y por tanto, también lo hacen los de la ecuación diferencial estocástica que aparecería en su interpretación probabilística. En resumen la interpretación probabilística sólo puede ser aquí empleada en el sentido de ser una interpretación "a priori".

En próximos trabajos se profundizará en algunas de estas cuestiones, así como en el estudio del problema de evolución.

Veamos por tanto ahora algunas cuestiones sobre el conjunto de coincidencia.

§4. ESTIMACION DEL CONJUNTO DE COINCIDENCIA

Por razones expuestas en la introducción y en el primer capítulo, resulta interesante estimar el conjunto de coincidencia con el obstáculo $[u=\psi]$. Para ello procederemos como en el capítulo anterior.

Teorema 4.1. "Sea $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_o^{1,\infty}(\Omega)$, la solución de

(4.1) $\max\{\lambda u - F(D^2u,Du,u,x),u-\psi\} = 0,$ para casi todo $x \in \Omega$

Si existe una constante γ tal que

(4.2) $F(D^2\psi,D\psi,\psi,x) - \lambda\psi \geq \gamma,$ para casi todo $x \in \Omega$,

entonces, $u(x^\circ) = \psi(x^\circ)$, si $x^\circ \in \Omega$ y $d(x^\circ,\Gamma) \geq \left[\frac{6NM}{\gamma} \sup_\Gamma \psi\right]^{1/2}$"

Demostración. Como en la demostración del teorema 3.1 consideremos la función auxiliar $\hat{u} = u-\psi$, para la que (4.1) queda convertida en

(4.3) $\max\{\lambda\hat{u} - L^{u,\psi}\hat{u} + \lambda\psi - F(D^2\psi,D\psi,\psi,x),0\} = 0,$ para c.t.$x \in \Omega$

Recuérdese (corolario 2.1) que los coeficientes del operador $L^{u,\psi}$ no son conocidos "a priori" por no ser conocido u de antemano.

Consideremos, como es costumbre, la función barrera puntual

$$v(x) = -k\,|x-x^\circ|^2, \quad \text{con } x^\circ \in \Omega \text{ y } k \text{ constante positiva}$$

por determinar.

Es claro que se tiene, por (4.2)

$$\lambda v(x) - L^{u,\psi}v(x) + \lambda\psi(x) - F(D^2\psi,D\psi,\psi,x) \leq -L^{u,\psi}v(x) - \gamma$$

Aunque los coeficientes de $L^{u,\psi}$ no sean conocidos si podemos acotarlos por M, con lo que empleando cálculos anteriores

$$- L^{u,\psi}v(x) - \gamma \leq 6NMk - \gamma \leq 0, \quad \text{si} \quad k = \frac{\gamma}{6NM}$$

Además, si $d(x°;\Gamma) = R$, entonces sobre la frontera Γ se tiene

$$(4.4) \qquad v(x) \leq -kR^2 = -\frac{\gamma}{6NM} R^2 \leq \inf_{\Gamma} (-\psi) \leq -\psi(x) \leq \hat{u}(x),$$

si suponemos $R^2 \geq \frac{6NM}{\gamma} \sup_{\Gamma} \psi$.

Finalmente empleando el principio de Bony sobre el operador elíptico $\tilde{L}^{u,\psi}$ es posible encontrar resultados de comparación que concluyan ([15])

$$0 = v(x°) \leq \tilde{u}(x°) = u(x°) - \psi(x°) \leq 0.\#$$

La condición (4.2) parece en principio muy fuerte como lo muestra el hecho de que si $\psi = 0$ en Γ entonces $u \equiv \psi$ en todo Ω. Por tanto, parece conveniente pensar en situaciones en las que tal condición no se tenga sobre todo Ω.

<u>Corolario 4.1</u>. "<u>Sea</u> $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_o^{1,\infty}(\Omega)$, <u>la solución de</u>

$$\max\{\lambda u - F(D^2u,Du,u,x),u-\psi\} = 0, \quad \text{para casi todo} \quad x \in \Omega$$

<u>Si existe una constante positiva</u>, γ, <u>y un subconjunto abierto</u> $G \subset \Omega$, <u>tales que</u>

$$F(D^2\psi,D\psi,\psi,x) - \lambda\psi \geq \gamma, \quad \text{para casi todo} \quad x \in G,$$

entonces, $u(x^\circ) = \psi(x^\circ)$, si $x^\circ \in G$ y

$$d(x^\circ;\partial G) \geq \left[\frac{6NM}{\gamma\lambda_0} \|\lambda\psi - F(D^2\psi, D\psi, \psi, x)\|_\infty\right]^{1/2} .\#$$

La demostración es análoga a la anterior empleando la estimación (iii) del teorema 3.1 para mayorar los valores desconocidos de $\hat{u}$ sobre la nueva frontera ∂G.

Siguiendo una idea desarrollada en el primer capítulo es posible estimar algunos valores de la solución del problema (P).

Proposición 4.1. "Sea $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,\infty}(\Omega)$ la solución del problema

$$\max\{\lambda u - F(D^2u, Du, u, x), u-\psi\} = 0, \text{ para casi todo } x \in \Omega$$

Sea $\inf\limits_{\overline{\Omega}} \psi > 0$, y supongamos que para $0 < \mu < \inf\limits_{\Omega} \psi$, existe una constante positiva γ tal que

(4.5) $\qquad F(0,0,\mu,x) - \lambda\mu \geq \gamma$, para todo $x \in \Omega$,

entonces $u(x^\circ) \geq \mu$, si $x^\circ \in \Omega$ y $d(x^\circ;\Gamma) \geq \left[\frac{6NM}{\gamma} \mu\right]^{1/2}$".

Demostración. Bajo las hipótesis de la proposición y el teorema 3.1 es fácil comprobar que $u(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega$.

Sea entonces $x^\circ \in \Omega$, con $d(x^\circ;\Gamma) \geq \left[\frac{6NM}{\gamma} \mu\right]^{1/2} = R$, y $\underline{u}$ la solución del problema (P) correspondiente al obstáculo μ en la bola $B(x^\circ;R)$.

De nuevo por resultados de composición se tiene $\underline{u}(x) \leq u(x)$, para todo punto de la bola.

Finalmente, considerando el teorema 4.1 sobre $\underline{u}$ en $B(x°;R)$ se concluye la proposición.#

Para este tipo de estimaciones es posible hacer aquí también comentarios como los del corolario 4.1.

Finalicemos estos resultados obteniendo estimaciones <u>cerca de la frontera</u>.

<u>Teorema 4.2.</u> "<u>Sea</u> $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_o^{1,\infty}(\Omega)$ <u>la solución de</u>

$$\max\{\lambda u - F(D^2u, Du, u, x), u-\psi\} = 0, \quad \underline{\text{para casi todo}} \quad x \in \Omega$$

<u>Supongamos que exista una constante positiva</u> γ <u>tal que</u>

$$F(D^2\psi, D\psi, \psi, x) - \lambda\psi \geq \gamma, \quad \underline{\text{para casi todo}} \quad x \in \Omega,$$

<u>así, como que</u> $\exists\ x° \in \Gamma$ y $r > \left[\frac{6NM}{\gamma} \sup_\Gamma \psi\right]^{1/2}$ <u>tales que</u> $\psi(x) = 0$ <u>en</u> $\Gamma \cap B(x°,r)$ <u>entonces</u>, $u(x) = \psi(x)$, <u>en</u> $\Omega \cap B(x°;s)$, <u>con</u> $s = r - \left[\frac{6NM}{\gamma} \sup_\Gamma \psi\right]^{1/2}$".

<u>Demostración</u>. Al igual que en el teorema 4.1 consideremos $\hat{u} = u-\psi$ que verifica

$$\max\{\lambda\hat{u} - L^{u,\psi}\hat{u} + \lambda\psi - F(D^2\psi, D\psi, \psi, x), 0\} = 0, \quad \text{para casi todo } x \in \Omega$$

Formemos la función <u>barrera local</u>

$$v_s(x) = \begin{cases} -\frac{\gamma}{6NM}(|x-x°| - s)^2, & \text{si} \quad |x-x°| > s \\ 0 & , \text{si} \quad |x-x°| \leq s \end{cases}$$

Tal función verifica, repitiendo cálculos anteriores,

$$\lambda\, v_s(x) - L^{u,\psi} v_s(s) + \lambda\psi(x) - F(D^2\psi, D\psi, \psi, x) \leq 0, \quad \text{para c.t.} x \in \Omega,$$

y en la frontera Γ se tiene

$$\text{si } |x-x^\circ| \geq r, \quad v_s(x) \leq -\frac{\gamma}{6NM}(r-s)^2 = -\sup_{\Gamma} \psi = \inf_{\Gamma} (-\psi) \leq$$

$$\leq \hat{u}(x)$$

$$\text{si } |x-x^\circ| < r, \quad v_s(x) \leq 0 = \hat{u}(x)$$

Finalmente, propiedades de comparación concluyen

$$0 = v_s(x) \leq \hat{u}(x) = u(x) - \psi(x) \leq 0, \quad \text{si } x \in B(x^\circ, s) \cap \Omega. _\#$$

La obtención de estimaciones sobre el <u>conjunto de continuación</u> $[u < \psi]$ resulta bastante más complicada, sin embargo es posible al menos encontrar una caracterización topológica.

<u>Teorema 4.3</u>. "<u>Supongamos que</u> Γ <u>es conexo, y que</u> $F(D^2\psi, D\psi, \psi, x) - \lambda\psi \geq 0$, <u>para casi todo punto de</u> Ω. <u>Supongamos también que</u> $\psi > 0$ <u>en</u> Γ, <u>entonces el conjunto</u> $[u < \psi] = \{x \in \Omega : u(x) < \psi(x)\}$ <u>es conexo</u>. (Donde $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_o^{1,\infty}(\Omega)$ es la solución de

$$\max\{\lambda u - F(D^2u, Du, u, x), u-\psi\} = 0, \quad \text{para casi todo } x \in \Omega)".$$

<u>Demostración</u>

En efecto, si $[u < \psi]$ no es conexo existirá una componente conexa, U de $[u < \psi]$, conteniendo a un entorno de Γ.

Sea entonces U' otra componente conexa de $[u < \psi]$.

Es claro que en U' la función u verificará

$$\lambda u(x) - F(D^2u(x),Du(x),u(x),x) = 0,$$

Por otra parte ,$\partial U'$ estará contenida en Γ o en $[u = \psi]$, pero como U' es una componente conexa de $[u < \psi]$ distinta de U a la fuerza $\partial U' \subset [u = \psi]$. Es decir,

$$\begin{cases} \lambda\psi(x) - F(D^2\psi(x),D\psi(x),\psi(x),x) \leq 0 = \lambda u(x) - F(D^2u(x),Du(x),u(x),x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{para casi todo } x \in U', \\ \psi(x) = u(x), \qquad \text{para todo } x \in \partial U', \end{cases}$$

luego, por el lema 3.2 del capítulo II se tiene el absurdo

$$\psi(x) \leq u(x) < \psi(x), \qquad \text{para todo } x \in U'. \#$$

La caracterización topológica del conjunto $[u = \psi]$ es bastante artificiosa. (En H. Brézis |16| se puede encontrar como $[u = \psi]$ es conexa, bajo hipótesis muy restrictivas; N=1, y para caso concreto $F(D^2u,Du,u,x) = \Delta u + \lambda u$).

§5. EL ERROR DE PENALIZACION

Lema 5.1. "Bajo los supuestos del teorema 1.3 se verifica

$$(5.1) \qquad \|(u_\varepsilon-\psi)^+\|_\infty \leq \varepsilon \|\lambda\psi - F(D^2\psi,D\psi,\psi,x)\|_\infty$$

siendo u_ε la solución del problema penalizado (P_ε)".

Demostración. Sea $x^\circ \in \overline{\Omega}$, tal que $|(u_\varepsilon-\psi)(x^\circ)| = \|u_\varepsilon-\psi\|_{C(\overline{\Omega})}$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x^\circ \in \Omega$ y $(u_\varepsilon-\psi)(x^\circ) > 0$, pues en caso contrario (5.1) resulta elemental.

La ecuación penalizada puede escribirse en la forma

$$(5.2) \qquad \lambda(u_\varepsilon-\psi) - \left[F(D^2u_\varepsilon,Du_\varepsilon,u_\varepsilon,x) - F(D^2\psi,D\psi,\psi,x)\right] + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi) = -\lambda\psi + F(D^2\psi,D\psi,\psi,x),$$

luego considerando el principio de J.M. Bony |13| se tiene

$$\limsup_{x \to x^\circ} \text{ess} \left(\lambda(u_\varepsilon-\psi)(x^\circ) - L^{u_\varepsilon,\psi}(u_\varepsilon-\psi)(x)\right) \geq 0,$$

es decir, $\forall \eta > 0$ y $\exists\, \delta > 0$ tales que

$$(5.3) \qquad \sup_{B(x^\circ,\delta)} \text{ess} \left(\lambda(u_\varepsilon-\psi) - L^{u_\varepsilon,\psi}(u_\varepsilon-\psi)\right) \geq -\eta$$

Entonces de (5.2) y (5.3) deducimos

$$\inf_{B(x^\circ;\delta)} \text{ess} \left(\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi) + \lambda\psi - F(D^2\psi,D\psi,\psi,x)\right) \leq \eta$$

y entonces

$$-\|\lambda\psi - F(D^2\psi,D\psi,\psi,x)\|_\infty + \inf_{B(x^\circ;\delta)} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi) \leq \eta,$$

obteniéndose (5.1) de la continuidad en x° y de las definiciones de β_ε dadas en el capítulo II.#

Teorema 5.1. "Bajos las hipótesis de los teoremas 1.1 y 1.3 se verifica

(5.4) $$\|u-u_\varepsilon\|_{C(\bar{\Omega})} \le \varepsilon \| \lambda\psi - F(D^2\psi, D\psi, \psi, x)\|_\infty$$

siendo u la solución del problema (P) correspondiente a valores grandes de λ".

Demostración. Del lema 3.3 y de la desigualdad

$$\lambda u - F(D^2u, Du, u, x) + \beta_\varepsilon(u-\psi) \le 0 = \lambda u_\varepsilon - F(D^2u_\varepsilon, Du_\varepsilon, u_\varepsilon, x) + \\ + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)$$

se deduce que $u \le u_\varepsilon$.

Como $u, u_\varepsilon \in C(\bar{\Omega})$ podemos suponer sin perdida de generalidad que $\exists\ x^\circ \in \Omega$ tal que $(u_\varepsilon-u)(x^\circ) = \|u_\varepsilon-u\|_\infty$, pues en caso contrario (5.4) es trivial.

A lo largo de la demostración emplearemos la relación

(5.5) $$\max\{\lambda(u-u_\varepsilon) - (F(D^2u, Du, u, x) - F(D^2u_\varepsilon, Du_\varepsilon, u_\varepsilon, x)) - \\ - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi);\ u-\psi\} = 0,$$

para casi todo $x \in \Omega$.

Además, $(u_\varepsilon-\psi)(x^\circ) \ge 0$, pues en caso contrario, por continuidad, existiría un entorno Ω' de x°, tal que $u(x) < u_\varepsilon(x) < \psi(x)$, $\forall x \in \Omega'$ y considerando entonces el principio de Bony se tendría

$$\limsup_{\substack{x \to x^\circ \\ x \in \Omega'}} \text{ess} \, (-\lambda_o(u_\varepsilon - u) + \lambda(u_\varepsilon - u) - L^{u_\varepsilon, u}(u_\varepsilon - u)) \geq 0,$$

es decir, $\forall \eta > 0 \ \exists \ \delta > 0$, tales que

(5.6) $$\sup_{B(x^\circ;\delta) \cap \Omega'} \text{ess} \, (-\lambda_o(u_\varepsilon - u) - \lambda(u - u_\varepsilon) + L^{u, u_\varepsilon}(u - u_\varepsilon)) \geq -\eta$$

(recuérdese que $-L^{u_\varepsilon, u}(u_\varepsilon - u) = L^{u, u_\varepsilon}(u - u_\varepsilon)$).

Ahora bien, de (5.5) se dedcue

$0 = \lambda(u - u_\varepsilon)(x) - [F(D^2u, Du, u, x) - F(D^2u_\varepsilon, Du_\varepsilon, u_\varepsilon, x)] \quad \forall x \in \Omega'$, y por tanto (5.6) conduce a

(5.7) $$\inf_{B(x^\circ;\delta) \cap \Omega'} (\lambda(u_\varepsilon - u)(x)) \leq \eta,$$

derivándose facilmente una contradicción para algunos valores η.

Por tanto, $x^\circ \in \Omega$ es tal que $(u_\varepsilon - u)(x^\circ) = \|u_\varepsilon - u\|_\infty$ y $(u_\varepsilon - \psi)(x^\circ) \geq 0$.

Consideremos ahora el problema (P) correspondiente a valores grandes de λ, de forma que se pueda emplear el principio de Bony, y asegurar

$$\limsup_{\substack{x \to x^\circ \\ x \in \Omega''}} \text{ess} \, (-\beta_\varepsilon(u_\varepsilon - u) + \lambda(u_\varepsilon - u) - L^{u_\varepsilon, u}(u_\varepsilon - u)) \geq 0,$$

donde Ω'' es un entorno de x° en el que $u_\varepsilon - u$ sólo toma valores positivos. (Recuérdese que tomando Ω'' tal que $(u_\varepsilon - u)(x) > 2\varepsilon$, $\forall x \in \Omega''$ basta con exigir $\lambda > -\frac{1}{\varepsilon} + 1$, sin más que observar la definición de β_ε en el capítulo II).

Es decir, $\forall \eta > 0 \ \exists \ \delta > 0$, tales que

$$\sup_{B(x^\circ;\delta)\cap \Omega''} \text{ess} \ (-\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u) + \lambda(u_\varepsilon-u) - L^{u_\varepsilon,u}(u_\varepsilon-u)) \geq -\eta,$$

pero de nuevo $-L^{u_\varepsilon,u}(u_\varepsilon-u) = L^{u,u_\varepsilon}(u-u_\varepsilon)$, llegándose a

$$\sup_{B(x^\circ;\delta)\cap \Omega''} \text{ess} \ (-\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u) - \lambda(u-u_\varepsilon) + L^{u,u_\varepsilon}(u-u_\varepsilon)) \geq -\eta. \tag{5.8}$$

Finalmente, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x^\circ \in [u < \psi]$, pues en caso contrario (5.4) se seguiría de (5.1). Luego si consideramos Ω'' suficientemente pequeño, la continuidad de $u-\psi$ permite de (5.5) y (5.8) llegar a

$$\sup_{B(x^\circ;\delta)\cap \Omega''} (-\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)) \geq -\eta \tag{5.9}$$

Además $(u_\varepsilon-\psi)(x) \not\equiv 0$ en Ω'', pues en caso contrario podríamos deducir de (5.9) una contradicción análoga a la obtenida en (5.7).

Luego el segundo sumando del miembro de la derecha de (5.9) puede suponerse no identicamente nulo en $B(x^\circ;\delta)\cap \Omega''$.

Por tanto

$$\inf_{B(x^\circ;\delta)\cap \Omega''} (\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u) + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)) \leq \eta$$

y de ahí

$$\inf_{B(x^\circ;\delta)\cap \Omega''} (\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)) \leq \eta,$$

la continuidad en x° y la monotonía de β_ε, así como (5.1) concluyen la estimación (5.4).#

El teorema 1.1 confirma la convergencia uniforme obtenida en el teorema 1.1

Estimaciones como las expresadas en (5.4) son bastante útiles en el estudio de cuestiones asintóticas. (Una exposición detallada de ese tipo de cuestiones puede encontrarse en A. Bensoussan - J.L. Lions - G. Papanicolau |12|).

NOTAS DEL CAPITULO II

([1]) Una detallada exposición de esa clase de inecuaciones puede encontrarse en G. Duvaut-J.L. Lions |35|, A. Bensoussan-J.L. Lions |10|, |11|, etc.

([2]) Como se indicó en la introducción la regularidad concreta de F no es por ahora la cuestión más importante.

([3]) En lo que sigue, salvo mención contraria, emplearemos el convenio de sumación del índice repetido.

([4]) Para una exposición detallada ver H. Brézis |17|.

([5]) Este método se debe a Bernstein (una exposición detallada puede encontrarse en O.A. Ladyzenskaja - V.A. Solonnikov-N.N. Ural'ceva |60|).

([6]) Para obtener esa regularidad basta referirse a la F y emplear técnicas como las señaladas en D. Gilbarg - N.S. Trudinger |47|.

([7]) Una exposición detallada del método de continuidad puede encontrarse por ejemplo en R. Courant-D. Hilbert |21|, o en D. Gilbarg - N.S. Trudinger |47|.

([8]) La idea de definir un producto semiinterior en cualquier espacio de Banach real o complejo fue introducida por G. Lumer. Más adelante R.S. Phillips |70| empleó los productos semiinteriores de Lumer para caracterizar los generadores de los semigrupos lineales fuertemente continuos de contracciones. Finalmente, la expresión (2.4) denotada por $\tau(x,y)$ fue empleada por M. Hasegawa |49| como la más útil para caracterizar esos generadores. La notación $[\ ,\ ]_+$ es debida a M.G. Crandall, mientras que la $\tau(x,y)$ es debida a K. Sato.

(9) En realidad se debería pedir $\lambda \geq -M$ pero lo omitimos pues λ está destinada a ser no negativa.

(10) Recuérdese que $\hat{\lambda}_o^\varepsilon \to$ cte cuando $\varepsilon \to 0$ (ver lema 1.3).

(11) Por $[v < \psi]$ representamos, como es habitual, el conjunto en donde se realiza la desigualdad estricta entre v y ψ.

(12) El empleo de las técnicas de los operadores acretivos en ecuaciones no cuasilineales fue introducido por S. Pliska |71|, en el estudio de la ecuación de Bellman.

(13) Sin pérdida de generalidad hemos supuesto $\lambda \geq -M+1$.

(14) Obsérvese que $\hat{u} \leq \psi \leq \psi_\varepsilon$.

(15) Para no ser reiterativos omitimos la obtención de tales resultados, cuya demostración es de igual naturaleza que la desarrollada en el capítulo I o en el apartado 2 y 3.

CAPITULO III

PROPIEDADES DE EXTINCION FINITA PARA ALGUNOS PROBLEMAS DE EVOLUCION.

1. INTRODUCCION Y RESULTADOS PRELIMINARES

En este capítulo se estudia el comportamiento para instantes grandes, de funciones que verifiquen la ecuación doblemente no lineal

(1.1) $\qquad u_t(t,x) + \beta(-F(D^2u,Du,u,x)) \ni 0, \quad 0 < t, \quad x \in \Omega,$

es decir, que verifiquen una ecuación de evolución en la que una no linealidad actúa sobre un operador que puede ser completamente no lineal. En concreto, mostraremos cómo para algunas β, pudiendo incluso depender de x, la función u se extingue en tiempo finito, esto es, $\exists\, T_0 > 0$, tal que $u(t,x) = 0$, si $t \geq T_0$, para casi todo $x \in \Omega$.

Al estudio de esta propiedad sobre (1.1) se llegará cuando generalicemos algunos resultados expuestos en G. Díaz-I. Díaz |28|. Algunas de estas generalizaciones fueron anunciadas en G. Díaz |25|.

Por tanto, parece conveniente hacer algunos comentarios previos.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$, de frontera regular Γ, al que supondremos acotado salvo que se diga lo contrario, y consideremos el siguiente problema

$$(1.2) \qquad \begin{cases} u_t(t,x) + \beta(-\Delta u(t,x)) = 0, & 0 < t, \quad x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0 & 0 < t, \quad x \in \Gamma, \\ u(0,x) = u_o(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

donde β es una función <u>continua no decreciente</u> de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, tal que $0 = \beta(0)$ (toda la exposición que sigue es igualmente válida cuando β es un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$, tal que $\mathbb{R}(\beta) = D(\beta) = \mathbb{R}$ y $0 \in \beta(0)$).

La ecuación (1.2) aparece en muy diversos contextos, tales como propagación no lineal del calor, problema de Stefan, elasticidad con rozamiento, etc. Para algunos casos concretos de β, por ejemplo $\beta(r) = r^+$, (1.2) rige varios modelos que caen dentro de la <u>Programación Dinámica</u>, por lo que se establece alguna conexión con lo estudiado en capítulos anteriores.

La ecuación (1.2) puede ser abordada en el marco de técnicas bien distintas, véase por ejemplo O.A. Oleinik |69| o W.A. Straus |78|. Sin embargo, aquí emplearemos la teoría abstracta de ecuaciones de evolución gobernadas por operadores acretivos. Una exposición detallada puede encontrarse en Ph. Bénilan | 6 |, M.G. Grandall |22|, L.C. Evans |38|, etc.

En concreto, (1.2) puede ser estudiada en varios espacios funcionales, por ejemplo en $H^1_o(\Omega)$, cuando la suponemos gobernada por el operador m-acretivo (1)

$$D(A) = \{u \in H^1_o(\Omega) : -\Delta u \in L^1(\Omega), \ \beta(-\Delta u) \in H^1_o(\Omega)\}$$

$$Au = \beta(-\Delta u), \quad \text{si} \quad u \in D(A),$$

o en $L^\infty(\Omega)$, mediante el operador m-acretivo

$$D(B) = \{u \in L^\infty(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega) \;:\; \beta(-\Delta u) \in L^\infty(\Omega)\}$$

$$Bu = \beta(-\Delta u), \qquad si \quad u \in D(B)$$

(para detalles de este último resultado puede consultarse Ph. Bénilan-K.Ha |7|, K. Ha |48|, Y. Konishi |53|).

El estudio de (1.2) en cada uno de estos espacios permite una mejor comprensión de sus propiedades. Así, cuando consideramos (1.2) gobernada por A en $H_o^1(\Omega)$, a partir del isomorfismo canónico $-\Delta$ existente entre $H_o^1(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$ es posible relacionarla con la ecuación

$$(1.3) \qquad \begin{cases} v_t(t,x) - \Delta\beta(v(t,x)) = 0, & 0 < t, \quad x \in \Omega \\ \beta(v(t,x)) = 0 & 0 < t, \quad x \in \Gamma \\ v(0,x) = v_o(x) & x \in \Omega \end{cases} \qquad (^2),\ (^3)$$

a la que supondremos gobernada en $H^{-1}(\Omega)$ por el operador m-acretivo (ver H. Brézis |14|)

$$D(C) = \{v \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega) : \beta(v) \in H_o^1(\Omega)\}, \qquad \overline{D(C)} = H^{-1}(\Omega)$$

$$Cv = -\Delta\beta(v), \qquad si \quad v \in D(C).$$

Más exactamente, dado $v_o \in H^{-1}(\Omega)$, tal que $(-\Delta)^{-1} v_o \in \overline{D(A)}$ para la que $v \in C([0,+\infty[; H^{-1}(\Omega))$ es la solución de (1.3) correspondiente, entonces la función $u(t) = (-\Delta)^{-1} v(t) \in C([0,+\infty[; H_o^1(\Omega))$ es la única solución de (1.2) asociada al dato inicial $u_o = (-\Delta)^{-1} v_o$ (una exposición detallada se encuentra en G. Díaz-I. Díaz |28|).

De esta forma algunas propiedades de (1.3) gobernada por C pueden ser transmitidas a (1.2) gobernada por A. Ilustremoslo con un ejemplo: Es conocido que (1.3) tiene la propiedad de propagación finita o del soporte compacto, en efecto, recordemos:

Teorema 1.1. (I. Díaz |30|): "Supongamos que Ω no es acotado, y sea $v_o \in L^{\infty}(\Omega)$ tal que soporte $v_o \subset \{x \in \bar{\Omega} : |x| \leq R\}$, para algún $R > 0$. Entonces, si β verifica

$$(1.4) \qquad \int_0^r \frac{ds}{\beta^{-1}(s)} < +\infty, \qquad \forall r \in \mathbb{R},$$

el problema (1.3) asociado tiene una única solución fuerte en $H^{-1}(\Omega)$. Además, $\exists$ $K > 0$, tal que

$$\text{soporte } v(t,.) \subset \{x \in \bar{\Omega} : |x| \leq R + 2K\sqrt{t}\}, \quad \forall t \in [0,T]".\#$$ [4]

Pues bien, en virtud de la relación señalada, tal propiedad es satisfecha también por (1.2).

Teorema 1.2. [5]: "Sea Ω no acotado, y $u_o \in \overline{D(A)}$, tal que $\Delta u_o \in L^{\infty}(\Omega)$ con soporte $u_o \subset \{x \in \bar{\Omega} : |x| \leq R\}$, para algún $R > 0$.

Entonces, si β verifica (1.4), el problema (1.2) asociado tiene una única solución fuerte en $H_o^1(\Omega)$.

Además, $K > 0$ tal que soporte $u(t,.) \subset \{x \in \bar{\Omega} : |x| \leq R + 2K\sqrt{t}\}$". $\forall t \leq T$".

Demostración. Sea $\tilde{\Omega} = \{x \in \overline{\Omega} : |x| \leq R + 2K\sqrt{T}\}$ y consideremos sobre él los problemas (1.3) y (1.2), y procedamos formalmente.

Como $v_o = -\Delta u_o$ tiene soporte compacto, $-\Delta\tilde{u}(t,.)$ tiene soporte compacto, $\forall t \leq T$ por el teorema 1.1, donde $\tilde{u}$ es la solución de (1.2) relativa a u_o en $\tilde{\Omega}$.

Supongamos entonces que $\exists\ x_o \notin$ soporte $(-\Delta\tilde{u}(t,.))$, es decir, tal que $-\Delta\tilde{u}(s,x_o) = 0$, $\forall s \leq t$. Para x_o se tendrá

$$\tilde{u}_t(s,x_o) + \beta(-\Delta\tilde{u}(s,x_o)) = 0 \Longrightarrow \tilde{u}_t(s,x_o) = 0, \quad \forall s \leq t,$$

por tanto $\tilde{u}(s,x_o) = \text{cte}$, $\forall s \leq t$. Pero $u_o(x_o) = 0$, luego $\tilde{u}(s,x_o) = 0$, $\forall s \leq t$.

El teorema acaba expresando que

$$u(t,x) = \begin{cases} \tilde{u}(t,x), & 0 < t, \quad x \in \tilde{\Omega} \\ 0 \quad , & 0 < t, \quad x \in \Omega-\tilde{\Omega} \end{cases}$$

es la solución en todo Ω de (1.2).#

La obtención del teorema 1.2 via el teorema 1.1 es muy importante, puesto que el operador A en $H^1_o(\Omega)$ sobre (1.2) no admite resultados de comparación, y ésta es una herramienta fundamental en el estudio de propiedades como las señaladas en los teoremas 1.1 y 1.2.

Sin embargo, es posible establecer ese tipo de resultado sobre (1.2), directamente, si le suponemos gobernado por B en $L^\infty(\Omega)$, ya que este operador si admite la posibilidad de comparar soluciones. En efecto, veamoslo de una forma más general.

Teorema 1.3. "Sea A un operador acretivo en $L^{\infty}(\Omega)$, monótono en $L^2(\Omega)$, y tal que $R(I + \lambda A) = L^{\infty}(\Omega)$, $\forall\lambda > 0$.

Sea, por otro lado, $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para casi todo $x \in \Omega$

$$D_x(\beta) \ni r \longrightarrow \beta(x,r) \quad \text{es monótona unívoca.}$$

Entonces, βA es T-acretivo en $L^{\infty}(\Omega)$". ([6]).

Demostración. Dados $f_1, f_2 \in L^{\infty}(\Omega)$, sean $u_i = (I + \lambda\beta A_2)^{-1} f_i$, $\lambda > 0$ $(i=1,2)$, siendo $A_2 = \overline{A}^{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}$, con lo que $u_i \in L^2(\Omega)$.

Por tanto, $v_i \in L^2(\Omega)$, con $[u_i, v_i] \in A_2$ $(i=1,2)$, tales que para casi todo $x \in \Omega$

$$(1.5) \qquad \frac{f_i(x) - u_i(x)}{\lambda} = \beta(x, v_i(x)), \qquad i=1,2, \qquad ([7])$$

Por otro lado, los operadores como A verifican la relación

$$(1.6) \qquad \int_{\Omega} \operatorname{sign}\,(u_1-u_2)(|u_1-u_2|-k)^+(v_1-v_2) \geq 0$$

$\forall |u_i, v_i| \in A$, $k \geq 0$ y $|r| = r^+ + r^-$ (ver K. Ha |48|).

Razonando por adherencia, (1.6) es también válida para A_2, y haciendo $k = \|(f_1-f_2)^+\|_{\infty}$ se deduce, de la expresión (1.6) correspondiente,

$$(1.7) \qquad \int_{\tilde{\Omega}} \operatorname{sign}\,(u_1-u_2)(|u_1-u_2| - \|(f_1-f_2)^+\|_{\infty})^+(v_1-v_2) \geq 0$$

donde $\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega : |(u_1-u_2)(x)| > \|(f_1-f_2)^+\|_{\infty}\}$.

Ahora bien, cualquier $x \in \tilde{\Omega}$ sólo puede determinar una de estas posibilidades

i) $(u_1-u_2)(x) > \|(f_1-f_2)^+\|_\infty \Longrightarrow \text{sign}\,(u_1-u_2)(x) = +1$

Además como $\|(f_1-f_2)^+\|_\infty \geq (f_1-f_2)(x)$ se tiene $(u_1-u_2)(x) > (f_1-f_2)(x)$, y de (1.5) se concluye

$$v_2(x) > v_1(x)$$

ii) $-(u_1-u_2)(x) > \|(f_1-f_2)^+\|_\infty \Longrightarrow \text{sign}\,(u_1-u_2)(x) = -1$, y como $\|(f_1-f_2)^+\|_\infty \geq -(f_1-f_2)(x)$ se tiene $(u_1-u_2)(x) < (f_1-f_2)(x)$ y ahora (1.5) concluye

$$v_1(x) > v_2(x).$$

Por tanto, $\text{sign}\,(u_1-u_2)(x)(|(u_1-u_2)(x)| - \|(f_1-f_2)^+\|_\infty)^+(v_1-v_2)(x)<0$ para casi todo $x \in \tilde{\Omega}$, pero entonces de (1.7) se deduce que $\tilde{\Omega}$ tiene medida nula, luego para casi todo $x \in \Omega$, $|(u_1-u_2)(x)| \leq \|(f_1-f_2)^+\|_\infty$.#

Teorema 1.4. "Sea A un operador como en el teorema 1.3 y $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que para casi todo $x \in \Omega$, $\beta(x,r)$ es un grafo maximal monótono verificando además que si $s \in \mathbb{R}$ $\exists$ $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que $s \in \beta(x,v(x))$ para casi todo $x \in \Omega$.

Entonces, si el operador A verifica alguna de estas propiedades:

a) $\forall f \in L^\infty(\Omega)$ y $\lambda > 0$ existe como mucho un $u \in L^\infty(\Omega)$, tal que $u + \lambda\,\beta A u \ni f$,

b) $\forall M \geq 0$, el conjunto $\{u \in D(A) : \|u\|_\infty + \|Au\|_\infty \leq M$ es relativamente compacto en $L^\infty(\Omega)$,

podemos concluir que βA es T-acretivo en $L^\infty(\Omega)$, si no es vacio".

Demostración.

a) Siguiendo la exposición de K. Ha |48|, bajo las anteriores hipótesis, si $f \in R(I+\lambda\beta A)$ y $u_\varepsilon = (I+\lambda\beta_\varepsilon A)^{-1}f$ entonces $u_\varepsilon \longrightarrow (I+\lambda\,\beta A)^{-1}f$ en $\sigma(L^\infty(\Omega),\ L^1(\Omega))$, cuando $\varepsilon \downarrow 0$, donde β_ε es la aproximación Yosida de β.

Por tanto

$$\|((I+\lambda\beta A)^{-1}f_1-(I+\lambda\beta A)^{-1}f_2)^+\|_\infty \leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|((I+\lambda\beta_\varepsilon A)^{-1}f_1 - (I+\lambda\beta_\varepsilon A)^{-1}f_2)^+\|_\infty \leq \|(f_1-f_2)^+\|_\infty,\quad \forall\lambda>0, \tag{1.8}$$

por el teorema anterior.

b) Siguiendo igualmente la referencia señalada, sabemos que existe un filtro $\{\varepsilon_i\}_i$ tal que para $\varepsilon_i \downarrow 0$

$u_{\varepsilon_i} = (I+\lambda\beta_\varepsilon A)^{-1}f \longrightarrow (I+\lambda\beta A)^{-1}f$ para $f \in L^\infty(\Omega)$, $\lambda>0$,

por tanto, basta con repetir (1.8) para ese filtro.#

La comparación de soluciones es entonces fácil de obtener.

<u>Corolario 1.1.</u> "<u>Sean</u> $u_i(t)$ $(i=1,2)$ <u>las soluciones integrales de</u>

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du_i(t)}{dt} + \beta\,Au_i(t) \ni f_i(t) \\ &u_i(0) = u_{oi}\end{aligned}\right\}\ (i=1,2) \tag{1.9}$$

<u>Si</u> $u_{o1} \leq u_{o2}$ <u>en</u> $L^\infty(\Omega)$, <u>y para casi todo</u> $t \geq 0$, $f_1(t) \leq f_2(t)$ <u>en</u> $L^\infty(\Omega)$ <u>entonces</u> $u_1(t) \leq u_2(t)$ <u>en</u> $L^\infty(\Omega)$, $\forall t \geq 0$".

<u>Demostración</u>. Como βA es T-acretivo en $L^{\infty}(\Omega)$ siguiendo las proposiciones I.27 y I.28 de Ph. Bénilan | 5 |, se tendrá para casi todo $t \geq 0$

$$\|(u_1(t)-u_2(t))^+\|_\infty \leq \|(u_1(0)-u_2(0))^+\|_\infty +$$

$$+ \int_0^t \phi_s(f_1(\tau) - f_2(\tau), \; u_1(\tau) - u_2(\tau))d\tau$$

donde aquí $\phi(.) = \|(.)^+\|_\infty$ y $\phi_s(y,x) = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \dfrac{\phi(x+\lambda y) - \phi(x)}{\lambda}$.

Como $(x+\lambda y)^+ \leq x^+ + \lambda y^+$,

$\|(x+\lambda y)^+\|_\infty \leq \|x^+ + \lambda y^+\|_\infty \leq \|x^+\|_\infty + \lambda\|y^+\|$ luego

$$\phi_s(f_1(\tau)-f_2(\tau),u_1(\tau)-u_2(\tau)) \leq$$

$$\leq \frac{\phi(u_1(\tau)-u_2(\tau)) + \lambda\phi(f_1(\tau)-f_2(\tau))-\phi(u_1(\tau)-u_2(\tau))}{\lambda}$$

es decir,

$$\phi_s(f_1(\tau)-f_2(\tau),u_1(\tau)-u_2(\tau)) \leq \|(f_1-f_2)^+\|_\infty = 0.$$

Por tanto $\|(u_1(t)-u_2(t))^+\|_\infty \leq \|(u_1(0)-u_2(0))^+\|_\infty$, con lo que

$$u_1(t) \leq u_2(t) \quad \text{en} \quad L^{\infty}(\Omega), \quad \forall t \geq 0. \# \quad (^8).$$

Incluso es posible concluir comparaciones de la solución con sub y supersoluciones, esto es, con funciones que satisfagan el problema de Cauchy abstracto (1.9) por minoración o mayoración. En concreto, para el problema (1.2) gobernado por B en $L^{\infty}(\Omega)$ que verifica los teoremas 1.3, 1.4 y el corolario 1.1 se tiene

Corolario 1.2. (G. Díaz-I. Díaz |28|): "Sea $u_o \in \overline{D(B)}^{L^\infty(\Omega)}$ y u la solución correspondiente. Sean, por otra parte, $u_i \in W^{1,1}_{loc}(0,+\infty;L^\infty(\Omega))$ con $\Delta u_i \in L^1_{loc}(0,+\infty;\ L^\infty(\Omega))$, tales que:

$$\frac{du_i}{dt}(t,.) + \beta(-\Delta u_i(t,.)) = f_i(t,.), \quad \text{para casi todo} \quad t>0, \quad \text{en } L^\infty(\Omega)$$

$$u_i(t,x) = g_i(t,x) \quad , \quad \text{para casi todo} \quad (t,x) \in [0,+\infty[\times \Gamma$$

$$u_i(0,x) = u_{io}(x) \quad , \quad \text{para casi todo} \quad x \in \Omega.$$

(i=1,2). Entonces, si $f_1 \leq 0 \leq f_2$, $g_1 \leq 0 \leq g_2$ y $u_{o1} \leq u_o \leq u_{o2}$ se tiene $u_1(t,x) \leq u(t,x) \leq u_2(t,x)$, para todo $t \geq 0$ y para casi todo $x \in \Omega$". #

Siguiendo entonces las técnicas usuales (véase I. Díaz |30|) es posible llegar directamente a un resultado como el encontrado en el teorema 1.2.

Teorema 1.5. (G. Díaz-I. Díaz |27|). "Sea Ω no acotado y $u_o \in \overline{D(B)}^{L^\infty(\Omega)}$ tal que, soporte $u_o \subset \{x \in \overline{\Omega} : |x| \leq R\}$, para algún $R > 0$.

Entonces, si β verifica (1.4) el problema (1.2) asociado admite una única solución (en el sentido de los semigrupos no lineales) tal que

$$\text{soporte } u(t,.) \subset \{x \in \overline{\Omega} : |x| \leq R + K_1(T) + K_2(T).t\}, \quad \forall t \in [0,T]". \#$$ ([9])

Los resultados de los teoremas 1.2 y 1.5 tienen importancia en otros tipos de problemas, por ejemplo en ciertas ecuaciones hiperbóli cas no lineales de la forma $u_{tt} - \Delta u + \beta(u_t) \ni 0$ (ver G. Duvaut-J.L. Lions |35|).

También es posible transmitir algunas propiedades de (1.2) a (1.3) En efecto, aprovechando que (1.2) puede ser estudiada en $L^\infty(\Omega)$, y por tanto se tienen resultados de comparación, se puede obtener la si guiente propiedad.

Teorema 1.6. (G. Díaz-I. Díaz |28|): "Sea $u_o \in H^1_o(\Omega)$ tal que $\Delta u_o \in L^\infty(\Omega)$ y $u \in C([0,+\infty[\ ; L^\infty(\Omega))$ la solución de (1.2) correspondiente. Entonces una condición necesaria y suficiente para la existencia de $T_o > 0$, tal que $u(t,x) = 0$, para casi todo $x \in \Omega$, para todo $t \geq T_o$, es que

$$(1.10) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty".$$

Pero como además (1.2) puede ser estudiado en $H^1_o(\Omega)$ es posible transmitir la anterior propiedad de extinción finita a (1.3) gobernada por C en $H^{-1}(\Omega)$.

Teorema 1.7. (G. Díaz-I. Díaz |28|): "Sea $v_o \in H^{-1}(\Omega)$ $L^1(\Omega)$ tal que $(-\Delta)^{-1} v_o \in L^\infty(\Omega)$ y v la solución correspondiente de (1.3). Entonces, la hipótesis (1.10) es una condición necesaria y suficiente para la existencia de $T_o > 0$, tal que $u(t,x) = 0$, para casi todo $x \in \Omega$, $\forall t \geq T_o$".

En la demostración del teorema 1.7 se emplean también otro tipo de propiedades distintas a la del isomorfismo canónico $-\Delta$ entre $H_o^1(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$, tales como efectos regularizantes, truncación, etc. También es posible obtener el teorema 1.7 para $v_o \in L^p(\Omega)$ con p tal que $\max\{\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2}\} < p \leq +\infty$.

Como facilmente se observa, las hipótesis (1.4) y (1.10) permiten establecer una clasificación en este tipo de problemas. Ello ha sido profundizado en I. Díaz |32|.

En el apartado que sigue nos ocuparemos de generalizar el teorema 1.6 a otras situaciones [10] [11].

2. EXTINCION EN TIEMPO FINITO PARA ECUACIONES PARABOLICAS CON UNA NO LINEALIDAD SOBRE OPERADORES ELIPTICOS.

Como ya se ha indicado, nuestro principal objetivo es mostrar la propiedad de extinción en tiempo finito para algunos problemas no considerados en la sección anterior. Por tanto, con el fin de simplificar la exposición omitiremos en algunos casos los resultados de existencia y consideraremos funciones que "a priori" verifiquen tales problemas.

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ de frontera regular Γ y consideremos el problema

$$(2.1)\quad \begin{cases} u_t(t,x) + \beta(x, -\Delta u(t,x)) \ni 0 & (t,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\,(t,x) + \gamma(u(t,x)) \ni 0 & (t,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \Omega \\ u(0,x) = u_o(x) & \end{cases}$$

donde β es una aplicación de $\Omega \times \mathbb{R}$ en $P(\mathbb{R})$ verificando:

i) para casi todo $x \in \Omega, r \longrightarrow \beta(x,r)$ es un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$, con $0 \in \beta(x,0)$

ii) para todo $s \in \mathbb{R}$, $\exists\, v \in L^\infty(\Omega)$, tal que, para casi todo $x \in \Omega$ $s = \beta(x,v(x))$.

La intervención de x en la no linealidad β permite ampliar el campo de aplicabilidad de la ecuación (1.2). Por ejemplo, el siguiente problema que aparece en <u>control térmico</u> (véase G. Durant - J.L. Lions |35|)

$$(2.2)\quad \begin{cases} u_t(t,x) = \min\,\{\Delta u(t,x),\ \psi(x)\}, & \text{en} \quad]0,+\infty[\, \times \Omega \\ u(t,x) = 0 & , \ \text{en} \quad]0,+\infty[\, \times \Gamma \\ u(0,x) = u_o(x) & , \ \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

puede ser formulado en términos de (2.1), si consideramos

$$\gamma(r) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si} \quad r = 0 \\ \emptyset \text{ (conjunto vacío)}, & \text{si} \quad r \neq 0, \end{cases}$$

y

$$\beta(x,r) = \begin{cases} -\psi(x), & \text{si} \quad r \leq -\psi(x) \\ r \quad , & \text{si} \quad r > -\psi(x) \end{cases}$$

(algunas propiedades de la ecuación (2.2) serán expuestas en I. Díaz |33|).

Si γ es un grafo maximal monótono, con $0 \in \gamma(0)$, entonces el problema (2.1) admite una solución $u \in W^{1,\infty}(]0,+\infty[\times \Omega) \cap$ $\cap L^{\infty}(]0,+\infty[, H^2(\Omega))$ tal que $\Delta u \in L^{\infty}(]0,+\infty[\times \Omega)$, para cada $u_o \in D(\beta,\gamma)$ con

$$D(\beta,\gamma) = \{\phi \in L^{\infty}(\Omega) \cap H^2(\Omega) : \frac{\partial\phi}{\partial n} + \gamma(\phi) \ni 0, \text{ en casi todo punto de } \Gamma,$$

$$y \ \exists \ w \in L^{\infty}(\Omega) \text{ tal que } w \in \beta(.,\Delta\phi), \text{ en casi todo punto de } \Omega\}$$

Además, si γ es <u>lineal e inyectiva</u> tal solución es <u>única</u> (para detalles véase K. Ha |48|). Para estas consideraciones son válidas los resultados de comparación de la sección anterior.

Por tanto, en todo lo que sigue consideraremos <u>sólamente</u> este tipo de grafos γ, y así mismo supondremos por comodidad que β es <u>unívoco</u>. Los resultados que se expondran son igualmente válidos para el caso multívoco de β.

Expongamos primeramente un resultado para el caso en que $\beta(x,r)$ sea constante en x.

<u>Teorema 2.1</u>. "<u>Sea</u> $u_o \in D(\beta,\gamma)$, <u>y</u> u <u>la solución de</u> (2.1) <u>correspondiente. Entonces, una condición necesaria y suficiente para la existencia de</u> $T_o > 0$, <u>tal que</u> $u(t,x) = 0$, <u>para casi todo</u> $x \in \Omega$, $\forall t \geq T_o$, <u>es que</u>

$$\int_{-1}^{+1} \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty \text{''}. \tag{2.3}$$

<u>Demostración</u>. Bastará seguir, con algunas modificaciones la prueba del teorema 1.6. A tal fin necestaremos un resultado de comparación sobre

(2.1), lo que se establecerá en cada caso, empleando el corolario 1.1

<u>Necesidad</u>. Sin pérdida de generalidad podemos suponer

(2.4) $$\int_0^1 \frac{ds}{\beta(s)} = +\infty$$

y $u_o \geq 0$, con $u_o \not\equiv 0$. Debido al corolario 1.1 basta con construir una <u>subsolución</u> $\underline{u}$, tal que $\underline{u}(t,x) \not\equiv 0$, $\forall t > 0$.

Sean, entonces, $R > 0$, $k > 0$ y $x_o \in \Omega$, tales que $u_o(x) > k$ para $x \in B(x_o,2R) \subset\subset \Omega$. Consideremos una función $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que

$\psi(x) = 0$ para $|x-x_o| > 2R$,

$\frac{k}{2} \leq \psi(x) \leq k$ y $-\Delta\psi(x) \geq 0$, para $|x-x_o| \leq R$,

$0 \leq \psi(x) \leq \frac{k}{2}$ y $-\Delta\psi(x) \leq 0$, para $R < |x-x_o| \leq 2R$

Por otro lado, sea q ; $]0,1] \longrightarrow [0, +\infty[$ una función estrictamente decreciente dada por

$$q(z) = \frac{k}{2} \int \frac{ds}{\beta(\theta s)} ,$$

donde θ es una constante positiva por determinar. Entonces, la función $\phi(t) = q^{-1}(t)$ satisface: $\phi(t) > 0$, $\forall t \geq 0$, $\phi(0) = 1$ y

$$\phi'(t) = -\beta(\theta\,\phi(t))\,\frac{2}{k}, \quad \text{si} \quad t > 0$$

Finalmente la función $\underline{u} = \phi(t)\,.\,\psi(x)$ es una <u>subsolución</u>, para θ suficientemente grande, pues se tiene

a) $\underline{u}_t(t,x) + \beta(-\Delta\,\underline{u}(t,x)) = \phi'(t)\psi(x) + \beta(-\phi(t)\,.\,\Delta\psi(x) \equiv f(t,x)$

donde $f(t,x) \leq -\beta(\theta\,\phi(t)).\frac{2}{k}.\frac{k}{2} + \beta(-\phi(t)\,\Delta\psi(x)) \leq 0$ en $|x-x_o| \leq R$ $x \in \Omega$ y

$f(t,x) \leq \beta(-\phi(t)\Delta\psi) \leq 0$ en $R < |x-x_o|$, $x \in \Omega$

b) $\frac{\partial \underline{u}}{\partial n}(t,x) = \phi(t) \cdot \frac{\partial\psi}{\partial n}(x) = \gamma(0)$, $(t,x) \in]0,\infty[\times \Omega$

c) $\underline{u}(0,x) = \phi(0) \cdot \psi(x) \leq k \leq u_o(x)$, para $x \in B(x_o,2R)$; en en resto la desigualdad es trivial.

Claramente, el corolario 1.1 concluye que entonces u no tiene extinción en tiempo finito.

Suficiencia. De nuevo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_o \geq 0$ y bastará con construir una supersolución $\overline{u}$ que tenga la propiedad de extinción.

Sea entonces el problema de autovalores

$$(2.5) \qquad \begin{cases} -\Delta\chi = \lambda\chi & \text{en} \quad \Omega \\ -\frac{\partial\chi}{\partial n} = \gamma\chi & \text{en} \quad \Gamma \end{cases}$$

donde identificamos el grafo γ con la pendiente la recta que determina.

Del teorema de M.G. Krein - M.A. Rutman se deduce la existencia de un autovalor $\lambda_o > 0$ y una autofunción $\chi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ que satisfacen (2.5), así como la de θ_o tal que $0 < \theta_o \leq \chi(x) < 1$ en $\overline{\Omega}$. [12]

Formemos por otro lado la función $q : [0, +\infty[$ dada por

$$q(t) = \int_o^z \frac{ds}{\beta(s)}, \qquad \forall z \geq 0$$

Esta función claramente es creciente, además sin pérdida de generalidad puede suponerse que es suprayectiva, sin más que modificar β

adecuadamente fuera del intervalo $]-\|\tilde{B}\, u_0\|_\infty, \|\tilde{B}\, u_0\|_\infty[$ si ello fuera necesario ([13]). Por tanto, la función q^{-1} satisface

$$(q^{-1}(z))' = \beta(q^{-1}(z)), \qquad \forall z > 0.$$

Definamos, finalmente

$$\phi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_0\theta_0} \cdot q^{-1}(\lambda_0\theta_0 \cdot (T_0-t)), & \text{si} \quad 0 \le t \le T_0 \\ 0 & , \text{si} \quad t \ge T_0 \end{cases}$$

donde T_0 es una constante positiva por determinar.

Con todo, la función $\overline{u}(t,x) = \phi(t) \cdot \chi(x)$ es una <u>supersolución</u> pues:

i) $\overline{u}_t(t,x) + \beta(-\Delta\, \overline{u}(t,x)) \ge \phi'(t) + \beta(-\phi(t)\Delta\chi(x)) \ge$

$\ge -((q^{-1})'(\lambda_0\theta_0(T_0-t))) + \beta((q^{-1})(\lambda_0\theta_0(T_0-t))) = 0$ en $]0,+\infty[\times\Omega$

ii) $-\dfrac{\partial\overline{u}(t,x)}{\partial n} = -\phi(t) \cdot \dfrac{\partial\chi}{\partial n}(x) = \phi(t) \cdot \gamma\chi(x) = \gamma\, \overline{u}(t,x)$, en $]0,+\infty[\times\Gamma$

iii) $\overline{u}(0,x) = \phi(0) \cdot \chi(x) \ge \dfrac{1}{\lambda_0\theta_0} q^{-1}(\lambda_0\theta_0 T_0)\lambda_0\theta_0 \ge \|u_0\|_\infty \ge u_0(x)$ si se toma $T_0 \ge \dfrac{1}{\lambda_0\theta_0} q(\|u_0\|_\infty)$.

Empleando entonces el corolario 1.1 se concluye la extinción en tiempo finito de la solución.#

El teorema anterior puede ser extendido al caso en que β <u>depende de</u> x.

<u>Corolario 2.1</u>. "<u>Sea</u> $u_o \in D(\beta,\gamma)$, <u>y</u> u <u>la solución de</u> (2.1) <u>correspondiente</u>.

<u>Se tienen los siguientes resultados</u>:

1) <u>Si</u> $\exists\, \beta_1$ <u>grafo maximal monótono de</u> $\mathbb{R}^2$, $\beta_1(0) = 0$, <u>tal que para casi todo</u> $x \in \Omega$ $|\beta(x,r)| \geq |\beta_1(r)|$, <u>y</u> β_1 <u>verifica</u> (2.3), <u>entonces</u> u <u>tiene extinción en tiempo finito</u>.

2) <u>Si</u> $\nexists\, \beta_2$ <u>grafo maximal monótono de</u> $\mathbb{R}^2$, $\beta_2(0) = 0$, <u>tal que para casi todo</u> $x \in \Omega$, $|\beta(x,r)| \leq |\beta_2(r)|$ <u>y</u> β_2 <u>verifica</u> (2.4), <u>entonces</u> u <u>no tiene extinción finita</u> (si $u_o \not\equiv 0$)".#

Contrariamente a lo que sucede para condiciones de contorno de tipo Dirichlet, aquí no es posible establecer la propiedad de extinción en tiempo finito sobre el problema

$$
(2.6) \qquad \begin{cases} v_t(t,x) - \Delta\beta(v(t,x)) \ni 0, & 0 < t, \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial\beta(v(t,x))}{\partial n} + \gamma(v(t,x)) \ni 0, & 0 < t, \quad x \in \Gamma, \\ v(0,x) = v_o(x) & \qquad\quad x \in \Omega, \end{cases}
$$

a través de los resultados obtenidos sobre (2.1), ya que no se tiene la buena relación existente en el caso Dirichlet. Sin embargo, para algunos grafos γ es posible establecer la extinción finita sobre (2.6). Por ejemplo consideremos la siguiente situación.

<u>Teorema 2.2</u>. "<u>Supongamos que</u> β <u>es una función creciente, concava, verificando</u> (2.3) <u>y</u> $\beta(0) = 0$.

Sea $v_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma(r) = \beta(r)$, y v la solución correspondiente de (2.6) según la teoría de semigrupos no lineales en $L^1(\Omega)$.

Entonces, $\exists\ T_0 > 0$, tal que $v(t,x) = 0$, para casi todo $x \in \Omega$, $\forall t \geq T_0$".

Demostración. Procederemos de una manera formal.

Sea $\eta \equiv \beta^{-1}$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $\lim\limits_{x \to +\infty} \beta(x) = +\infty$, con lo que es posible escoger $f_0 > 0$ suficientemente grande para que se tenga

$$\eta(\beta(f_0)\theta_0) \geq \|u_0\|_\infty , \tag{2.7}$$

donde θ_0 es la cantidad positiva tal que $0 < \theta_0 \leq \chi(x) < 1$ en $\overline{\Omega}$, siendo χ la función que satisface

$$\begin{cases} -\Delta\chi = \lambda\chi & \text{en} \quad \Omega \\ -\dfrac{\partial\chi}{\partial n} = \chi & \text{en} \quad \Gamma \end{cases}$$

según se vió en la demostración del teorema 2.1 $(\lambda_0 > 0)$.

Escojamos $f(t)$ verificando la ecuación

$$\begin{cases} f'(t) + \lambda_0\ \beta(f(t)) = 0, \\ f(0) = f_0, \end{cases} \tag{2.8}$$

claramente f tiende hacia cero en tiempo finito.

Hagamos finalmente

$$\overline{v}(t,x) = \eta(\beta(f(t))\chi(x))$$

que claramente verifica $\overline{v}(t,x) = 0$, $\forall t \geq T_0$ (para un $T_0 > 0$).

Entonces, se tiene

$$\text{a)}\quad \overline{v}_t(t,x) - \Delta\beta(\overline{v}(t,x)) = \eta'(\beta(f(t))\chi(x)) \,.\, \beta'(f(t)) \,.\, f'(t) \,.\, \chi(x) -$$

$$(2.9)\qquad - \beta(f(t))\Delta\chi(x) = \frac{1}{\beta'(\eta(\beta(f(t))\chi(x)))}\, \beta'(f(t)) \,.\, f'(t) \,.\, \chi(x) +$$

$$+ \beta(f(t))\ \lambda_o\ \chi(x).$$

Ahora bien, $\beta(f(t))\chi(x) \leq \beta(f(t))$, puesto que $\theta_o \leq \chi(x) \leq 1$, luego $\eta(\beta(f(t))\chi(x)) \leq f(t)$, y como β es cóncava se tiene que β' es decreciente, con lo que $\beta'(\eta(\beta(f(t)).\chi(x))) \geq \beta'\ (f(t))$.

Finalmente, como $f' \leq 0$, se tiene

$$\frac{f'(t)}{\beta'(\eta(\beta(f(t)).\chi(x)))} \geq \frac{f'(t)}{\beta'(f(t))}\ .$$

Recordando (2.8), concluimos

$$\overline{v}_t(t,x) - \Delta\beta(\overline{v}(t,x)) \geq \frac{\beta'(f(t)).f'(t).\chi(x)}{\beta'(f(t))} + \beta(f(t))\lambda_o\ \chi(x) = 0$$

para $(t,x) \in\ ]0,+\infty[\ \times\ \Omega$,

$$\text{b)}\quad -\frac{\partial\beta(\overline{v}(t,x))}{\partial n} = -\frac{\partial(\beta(f(t))\chi(x))}{\partial n} = \beta(f(t))\ \chi(x) = \gamma(\overline{v}(t,x)),$$

para $(t,x) \in\ ]0,+\infty[\ \times\ \Gamma$,

$$\text{c)}\quad \overline{v}(0,x) = \eta(\beta(f_o)\ .\ \chi(x)) \geq \eta(\beta(f_o)\theta_o) \geq \|v_o\|_\infty \geq v_o(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

Los resultados de comparación deducidos de la T-acretividad en $L^1(\Omega)$ del operador que suponemos gobierna (2.6) concluye el teorema.#

Consideremos, finalmente, la situación más general expresada por

$$(2.10)\qquad \begin{cases} u_t(t,x) + \beta(x,Au(t,x)) = 0, & (t,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \Omega \\ u(t,x) = 0 & (t,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \Gamma \\ u(0,x) = u_o(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

o por

$$(2.11)\qquad \begin{cases} u_t(t,x) + \beta(x,Au(t,x)) = 0 & (t,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \Omega \\ \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial \nu_A} + \gamma(u(t,x)) = 0, & (t,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \Gamma \\ u(0,x) = u_o(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

donde A es un operador diferencial de segundo orden

$$A\phi = - a_{ij}\, \phi_{x_i x_j} + a_i\, \phi_{x_i} + a_o\, \phi \qquad (^{14})$$

con $a_{ij}, a_i, a_o \in L^\infty(\Omega)$, tales que

$$(2.12)\qquad \begin{cases} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\,|\xi|^2, \ \text{para casi todo} \ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^N, \\ \text{constante postiva:} \quad a_{ij} = a_{ji} \\ a_o(x) \geq 0, \quad \text{para casi todo} \ x \in \Omega. \end{cases}$$

Bajo las consideraciones que se han hecho a lo largo de este apartado es posible abordar los problemas (2.10) y (2.11) por la teoría de ecuaciones de evolución gobernada por operadores acretivos en $L^\infty(\Omega)$, siguiendo, por ejemplo, los resultados de K. Ha |48|.

Además, sobre este tipo de problemas se pueden repetir los razonamientos expuestos sobre (1.2) y (2.1) puesto que la versión del teorema de Krein-Rutman que empleamos en la demostración del teorema 2.1 es válida al considerarla sobre la situación descrita por (2.11).

Por tanto, podemos concluir los siguientes resultados:

Teorema 2.3. "Sea $u_o \in L^\infty(\Omega)$, tal que el problema (2.10) (respectiva mente), el problema (2.11) admita una solución u en el sentido de los semigrupos no lineales en $L^\infty(\Omega)$, y sea β un grafo no dependiente de x.

Entonces, una condición necesaria y suficiente para la existencia de $T_o > 0$, tal que $u(t,x) = 0$, para casi todo $x \in \Omega$, $\forall t \geq T_o$, es que β verifique (2.3)".#

Corolario 2.2. "Sean $u_o \in L^\infty(\Omega)$ y u como en el enunciado del teorema 2.3, y sea β dependiente de x.

Se tienen los siguientes resultados:

1) Si $\exists$ β_1 grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$, $\beta_1(0) = 0$, tal que para casi todo $x \in \Omega$ $|\beta(x,r)| \geq |\beta_1(r)|$ y β_1 verifica (2.3), entonces u tiene extinción en tiempo finito.

2) Si $\exists$ β_2 grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$, $\beta_2(0) = 0$, tal que para casi todo $x \in \Omega$ $|\beta(x,r)| \leq |\beta_2(r)|$ y β_2 verifica (2.4), entonces u no tiene extinción finita (si $u_o \not\equiv 0$).#

Estos últimos resultados permiten una generalización que transmite la propiedad de extinción finita sobre problemas que guardan alguna relación con los estudiados en los capítulos I y II.

En concreto consideremos el siguiente problema

$$(2.13)\qquad \begin{cases} u_t(t,x) + \beta(-F(D^2u,Du,u,x)) = 0 & (t,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \Omega \\ u(t,x) = 0 & (t,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \Gamma \\ u(0,x) = u_o(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

donde $F : \mathbb{R}^{N^2} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$

es una función regular, por ejemplo de clase C^2, verificando

i) <u>una hipótesis de elipticidad</u> ([15])

$\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(p,q,r,x)\xi_i\xi_j \geq \theta\, |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$ para algún número real $\theta > 0$ y todo $p \in \mathbb{R}^{N^2}$, $q \in \mathbb{R}^N$, $r \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$

ii) $F(0,0,0,x) = 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$ ([16]).

iii) $|DF(p,q,r,x)|, \quad |D^2F(p,q,r,x)| \leq M \quad \forall (p,q,r,x)$

iv) $\frac{\partial F}{\partial r}(p,q,r,x) \leq 0, \quad \forall (p,q,r,x)$.

Si suponemos que β es una función continuamente diferenciable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que

(2.14) β es no decreciente, $\beta(0) = 0$, y

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (|\beta(x)| + |\beta'(x)|) < \infty$$

entonces, el operador

$$(2.15)\qquad D(E) = \{\phi \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_o^{1,p}(\Omega), \quad \text{para} \quad p > N\}$$

$$E\,\phi = \beta(-F(D^2\phi,D\phi,\phi,x))$$

es acretivo en $L^\infty(\Omega)$ (ver L.C. Evans |37|), y por tanto permite estudiar (2.13) en este espacio funcional.

Recordando la exposición del capítulo II es posible la relación

$$-F(D^2u,Du,u,x) = A^u\, u(x) = -a^u_{ij}\, u_{x_ix_j}(x) + a^u_i(x)\, u_{x_i}(x) + \\ + a^u_o\,(x)\, u(x)$$

donde

$$a^u_{ij}(x) = \int_o^1 \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}\,(tD^2u,tDu,tu,x)dt,$$

$$a^u_i(x) = -\int_o^1 \frac{\partial F}{\partial q_i}\,(tD^2u,tDu,tu,x)dt$$

$$a^u_o(x) = -\int_o^1 \frac{\partial F}{\partial r}\,(tD^2u,tDu,tu,x)dt.$$

Con lo que razonando sobre el operador A^u como en los resultados anteriores es posible concluir el siguiente criterio.

Teorema 2.4. "Sea $u_o \in L^\infty(\Omega)$ tal que el problema (2.13) admite una solución u en el sentido de los semigrupos no lineales en $L^\infty(\Omega)$. Entonces, si β verifica la hipótesis (2.3), existe $T_o > 0$ tal que $u(t,x) = 0$, para casi todo $x \in \Omega$, $\forall t \geq T_o$". #

Como ya comentamos en otra parte, omitimos los detalles sobre la existencia de la solución u, suponiendola como hipótesis. En cualquier caso el reciente trabajo de L.C. Evans - P.L. Lions |40| nos acercan bastante a ellos.

El estudio de ésta y de otras propiedades sobre el problema de evolución asociado a las ecuaciones estudiadas en los capítulos anteriores seran objeto de un próximo trabajo.

NOTAS DEL CAPITULO III

([1]) Este es un resultado no publicado de H. Brézis.

([2]) La importancia de la ecuación (1.3) es muy grande. Diversos autores la han escogido como buen ejemplo al explicar la teoría abstracta de semigrupos no lineales (Ph. Bénilan | 6 |, L.C. Evans |38|. Ella aparece en fenómenos de muy diversa naturaleza: problema de Stefan, en el flujo en medios porosos, modelos biológicos, etc. De una manera muy llamativa aparece en un fenómeno que se produce inmediatamente después de una explosicón nuclear, exactamente en la conducción calorífica, que acompañando a la energía liberada, se produce por radiación; en ella la conductividad térmica es una función de la temperatura.

([3]) Los detalles de el isomorfismo canónico entre $H^1_o(\Omega)$ y su dual $H^{-1}(\Omega)$ pueden encontrarse en H. Brézis |14|.

([4]) Por solución fuerte entenderemos una solución que es derivable.

([5]) El teorema 1.2 es fruto de una conversación con H. Brézis.

([6]) Diremos que un operador A es T-acretivo en un espacio de Banach X, si verifica:

$$\|(u_1-u_2)^+\| \leq \|(f_1-f_2)^+\|$$

donde $u_1,u_2 \in D(A)$, $f_1,f_2 \in X$ son tales que

$$u_i + \lambda A u_i \ni f_i, \quad i=1,2 \qquad \text{con} \quad \lambda > 0$$

([7]) Obsérvese que como A es un m-acretivo en $L^\infty(\Omega)$, A_2 es maximal monótono en $L^2(\Omega)$, pues

$$R(I + \lambda A_2) = \overline{R(I+\lambda A)}^{L^2(\Omega)} = \overline{L^\infty(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega).$$

([8]) Para los conceptos de solución integral enviamos a Ph. Bénilan

| 5 |. Este corolario es una sencilla consecuencia de los resultados de esa referencia.

(9) Al contrario que en la demostración del teorema 1.1 aquí si es posible construir una supersolución que salve la discontinuidad que se presenta en el origen al trabajar con funciones radiales.

(10) La propiedad de extinción en tiempo finito para algunos problemas que se pueden abordar por la teoría de semigrupos no lineales fue estudiada de una manera abstracta por I. Díaz |31|. En concreto para (1.2) con β necesariamente multívoco en el origen.

(11) Otros autores han estudiado la propiedad de extinción finita por ejemplo E.S. Sabinina |74|, Ph. Bénilan - M.G. Crandall | 8 |, etc.

(12) La versión que aquí se utiliza se ha tomado de H. Amann | 2 |.

(13) Basta razonar como en K. Ha |48|.

(14) Consideremos de nuevo el convenio de sumación del índice repetido.

(15) Se puede debilitar la hipótesis sin considerar el caso uniformemente elíptico.

BIBLIOGRAFIA

[1] P.S. Adams: "Sobolev Spaces". Academic Press. New York. 1975.

[2] H. Amann: "Non linear operators in ordered Banach spaces and some applications to nonlinear boundary value problems". In Nonlinear Operators and the Calculus of Variations. Bruxelles 1975. Lecture Notes in Mathematics. n° 543. Springer-Verlag. Berlin. 1976.

[3] V. Barbu: "Non Linear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces", Noordhoff International Publishing, 1976.

[4] R. Bellman: "Dynamic Programing". Academic Press. 1957.

[5] Ph. Bénilan: Equations d'évolution dans une espace de Banach quelconde et applications. Thése d'Etat. Orasy. 1972.

[6] Ph. Bénilan: "Curso del 3er. Ciclo" Paris VI. Paris 1975-76.

[7] Ph. Bénilan et K. Ha: "Equation d'evolution du type $(\frac{du}{dt}) + \beta\partial\phi(u) \ni 0$ dans $L^\infty(\Omega)$". C.R. Acad. Sc. Paris. 281. serie A (1975). p. 947-950.

[8] Ph. Bénilan and M.G. Crandall: "The continuous dependence on ϕ of solution of $u_t - \Delta\phi(u) = 0$". TSR Mathematics Research Center. University of Wisconsin-Madison. 1979.

[9] A. Bensoussan, H. Brézis and A. Friedman: "Estimates on the free boundary of quasi variational inequalities". Comm. Partial Differencial Equations, 2 (1977), p.297-321.

[10] A. Bensoussan et J.L. Lions: "Applications des inéquations variationelles en contrôle stochastic". Dunod. Paris. 1978.

[11] A. Bensoussan et J.L. Lions: "Temps d'arret et controle impulsionnel". Dunod. Paris. 1978.

[12] A. Bensoussan, J.L. Lions and G. Papanicolau: "Asymptotic Analysis for Periodic Structures". North-Holland. 1978.

[13] J.M. Bony: "Principe du maximum dans les espaces de Sobolev". C.R.A.S. Paris, 265 (1967). 333-336.

[14] H. Brézis: "Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to non linear partial differential equations". Contributions to non-linear analysis. E. Zara tonello ed. Academic Press (1971) p. 101-156.

[15] H. Brézis: "Problèmes unilateraux". J. Math. Pures Appl. 51 (1973), 1-164.

[16] H. Brézis: "Curso del 3er. Ciclo". Paris VI. 1972-73

[17] H. Brézis: "Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert". North-Holland. 1973.

[18] H. Brézis: "Solutions with compact support of variational inequalities". Russian Math. Surveys, 29 (1974). p. 103-108.

[19] H. Brézis and L.C. Evans: "A variational approach to the Bellman-Dirichlet equation for two elliptic operators". Arch. Rat. Mech. Anal. 71 (1979) p. 1-14.

[20] H. Brézis and D. Kinderhlerer: "The smoothness of solutions to non-linear variational inequalities". Indiana. Univ. Math. J. 23 (1974), 831-844.

[21] R. Courant and D. Hilbert: "Methods of mathematical Physics". Vol. II, Interscience, New York. 1962.

[22] M.G. Crandall: "An introduction to evolution governed by accretive operators". Dynamical Systems. Academic Press (1976), 131-165.

[23] M.G. Crandall and T. Ligget: "Generation of semi-groups of non-linear transformations on general Banach spaces". Amer. J. Math. 93 (1971), 265-298.

[24] G. Díaz: "Estimación del conjunto de coincidencia para ciertas inecuaciones variacionales". Aparecerá en las Actas de II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. Barcelona. 1979.

[25] G. Díaz: "Extinción finita para ecuaciones parabólicas con no linealidades sobre operadores elípticos". Aparecerá en las Actas de las VI Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas. Santander. 1979.

[26] G. Díaz: "Estimation de l'Ensemble de coincidence de la solution des problèmes d'obstacle pour les equations de Hamilton-Jacobi-Bellman". Aparecerá próximamente en C.R. Acad. Sc. Paris.

[27] G. Díaz et I. Díaz: "Propietés des propagation finie et d'annulation de la solution pour certaines equationes paraboliques non lineares. "Publicaciones del Dpt. de Ec. Funcionales. Universidad Complutense. Madrid. 1979.

[28] G. Díaz and I. Díaz: "Finite extinction time for a class of non linear parabolic equation". Comm. In Partial Differential Equations. 4, 11 (1979), p. 1213-1231.

[29] I. Díaz: "Soluciones con soporte compacto para ciertos problemas semilineales". Aparecerá en Collectania Matemática.

[30] I. Díaz: "Solution with compact support for some degenerate parabolic problems". Non Linear Analysis. Theory. Methods and Application, 3, n° 6 (1979). p. 831-847.

[31] I. Díaz: "Anulación de soluciones para operadores acretivos en espacios de Banach. Aplicaciones a ciertos problemas parabólicos no lineales". Aparecerá en la Revista de la Real Acad. de Ciencias de Madrid.

[32] I. Díaz: "Propiedades cualitativas de ciertos problemas parabólicos no lineales: Una clasificación para los modelos de difusión del calor". Aparecerá como Memoria de la Real Acad. de Ciencias de Madrid.

[33] I. Díaz: "On the equation $u_t = \min\{\Delta u, \psi\}$ and the asymptotic behaviour of its solution". Aparecerá proximamente.

[34] I. Díaz and M.A. Herrero: "Estimates on the support of the solution of some non linear elliptic and parabolic problems". Aparecerá en Proc. Royal Soc. of Edimburgh.

[35] G. Duvaut et J.L. Lions: "Les inequation en mecanique et en physique". Dunod. 1972.

[36] E.B. Dynkin: "Markov Processes". Springer-Verlag, Berlin. 1965.

[37] L.C. Evans: "A convergence theorem for solutions of non linear second order elliptic equations". Indiana Univ. Math. J. 27 (1978) 875-887.

[38] L.C. Evans: "Applications of nonlinear semigroup theory to certain partial differential equations", in Non Linear Evolution Equations. M.G. Crandall ed. (1979).

[39] L.C. Evans et P.L. Lions: "Deux résultats de régularité pour le probleme de Bellman-Dirichlet". C.R. Acad. Sc. Paris. 286 (1978) p. 587-589.

[40] L.C. Evans and P.L. Lions: "Fully nonlinear second order elliptic equations with large zeroth order coefficient". M.R.C. Technical Summary Report. 1979.

[41] L.C. Evans and A. Friedman: "Optimal stochastic switching and the Dirichlet problem for the Bellman equation" (Aparecerá en Trans. Am. Math. Soc).

[42] W.H. Fleming and R. Rishel: "Deterministic and stochastic optimal control". Springer-Verlag. New York. 1975.

[43] A. Friedman: "Partial differential equations". Holt, Rinehart and Winston, New York. 1969.

[44] A. Friedman: "Stochastic diferential equations". Academic Press. New York. 1976.

[45] A. Friedman and P.L. Lions: "The optimas strategy in the control problem associated with the Hamilton-Jacobi-Bellman equations". Aparecerá en SIAM J. Control.

[46] I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod: "Stochastic differential equations". Springer-Verlag. New York. 1972.

[47] D. Gilbarg and N.S. Trudinger: "Elliptic partial differential equations of second order". Springer-Verlag. New York. 1977.

[48] K. Ha: "Sur des semi-groupes non lineaires dans les espaces $L^\infty(\Omega)$. Thesis du 3^{em} Cycle. Paris. VI. 1976.

[49] M. Hasegawa: "On contraction semi-group and (d_i)-operators". J. Math. Soc. Japan 18 (1966) 290-302.

[50] A. Kato: "Perturbacion theory for linear operators". Springer-Verlag. Berlin. 1966.

[51] D. Kinderlehrer, L. Nirenberg and J. Spruck: "Regularity in elliptic free boundary problems I". Journal d'Analyse Math. 34 (1978), 86-119.

[52] D. Kinderlehrer, L. Nirenberg and J. Spruck: "Regularity in elliptic free boundary protlems II".

[53] Y. Konishi: "On the nonlinear semi-groups associated with $u_t = \Delta\beta u$ and $\phi(u_t) = \Delta u$". J. Math. Soc. Japan. 25 (1973) p. 622-628.

[54] N.V. Krylov: "On control of the solution of a stochastic integral equation". Th. Proba. and Appl. 17 (1972). p.114-131.

[55] N.V. Krylov: "On the uniqueness of a solution of Bellman's equation". Math. USSR Izv. 5 (1971) p.1387-1398.

[56] N.V. Krylov: "On control of the solution of a stochastic integral equation with degeneration". Math. USSR Izv. 6 (1972), n° 1, 249-262.

[57] N.V. Krylov: "On passing to the limit in degenerate Bellman equations I". Math. USSR Sb 34 (1978) p. 765-783.

[58] N.V. Krylov: "On passing to the limit in degenerate Bellman equations II". Math. USSR Sb 35 (1979) P. 351-362.

[59] O.A. Ladyzenskaya and N.N. Utral'tceva: "Linear and quasilinear elliptic equations". Academic Press, New York. 1968.

[60] O.A. Ladyzenkaya, V.A. Solonnikov and N.N. Ural'tceva: "Equations paraboliques linéaires et quasi-linéaires". Moscou. 1967.

[61] E.B. Lee and L. Markus: "Foundations of optimal control theory". Wiley. New York. 1967.

[62] P.L. Lions: "Sur quelques classes d'equations aux derivées partialles non linéares et leur resolution numerique". Thése d'Etat. Paris. VI. Paris. 1979.

[63] P.L. Lions: Aparecerá en C.R. Acad. Sc. París.

[64] P.L. Lions et J.L. Menaldi: "Problèmes de Bellman avec le contrôle dans les coefficients de plus haut degré". CRAS. París 287 (1978) 409-412.

[65] J.L. Menaldi: "Sur le probleme de temps d'arret optimal pour les diffusions réfléchies dégénérées". C.R.A.S. París 289, série A (1979) p. 779-782.

[66] C. Miranda: "Equazione alle derivate partiziali di tipo elliptico". Springer-Verlag. New York. 1955.

[67] T. Nagai: "Estimates for the coincidence sets of solutions of elliptic variational inequalities". Hiroshima Math. J., 9 (1979) p. 335-346.

[68] N. Nisio: "Some remarks on optimal stochastic control. Proceedings erd Japan -USSR Symposium on Probability Theory, Lecture Notes. Springer-Verlag. Berlin. 1975, p. 446-460.

[69] O.A. Oleinik: "On some degenerate quasilinear parabolic equations". Seminario dell'Instituto Nazionale di Alta Matematica. 1962-63; Oderisi, Gulbio, 1964.

[70] R.S. Phillips: "Semi-group of positive contraction operators". Czechoslovak Math. J. 12 (87) (1962) 294-313.

[71] S.R. Pliska: "A semigroup representation of the maximum expected reward vector in continous parameter Markov decision theory". SIAM J. Control 13 (1975) 1115-1129.

[72] M.H. Protter and H.F. Weinberger: "Maximum principles in differential equations". Englewood Cliff. N.J. Prentice-Hall 1967.

[73] C. Pucci: "Operatori ellipticci estremanti". Ann. Math. Pur. Appl. 72 (4) (1966). 141-170.

[74] E.S. Sabinina: "On one class of non-linear degenerate parabolic equations". Doklady A.N. SSSR, 148, n° 4 (1962), p. 794-797.

[75] K. Sato: "On the generators of non-negative contraction semigroups in Banach lattices". J. Math. Soc. Japan 20 (1968), 431-436.

[76] E. Sinestrári: "Accretive differential operators". Bull. Un. Mat. Ital. 13 (1976), 19-31.

[77] I.V. Skrypnik: "On the topological character of general nonlinear operators". Doklady 239 (1978), 538-541.

[78] W.A. Strauss: "Evolution equations non-linear in the time derivates". J. Math. Mech. 15 (1966), p. 49-82.

[79] P. Van Moerbeke: "On optimal stopping and free boundary problems". Arch. Rat. Mech (1976), p. 101-148.

[80] D.J. White: "Teoría de la decisión". Alianza Editorial. Madrid. 1979.

[81] N. Yamada: "Estimates on the support of solution of elliptic variational inequalities in bounded domains". Hiroshima Math. J., 9, (1979), p. 7-16.

FE DE ERRATAS

Página	Línea	Dice	Debe decir
5	7	$v(x)$	$v(y)$
21	14	$-\sqrt{a}_i$	$-\sqrt{a_i^2}$
21	17	$\xi_o = \|\xi\|$	$\xi_o \in \mathbb{R}$
33	8	$= \{$	$= \min\{$
42	2	$\xi_o = \|\xi\|$	$\xi_o \in \mathbb{R}$
62	15	$\\|\lambda D^2 u\\|$	$\\|\lambda Du\\|$
63	2	$\tilde{L}^u u$	$L^u u$
68	14	$\\|u\\|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})}$	$\\|u\\|^{\nu}_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})}$
86	3	$\lambda v - F(D^2v, Dv, v, x)$	$\lambda v - F(D^2v, Dv, v, x^o) \geq 0$
94	5	(2.7)	(3.7)
95	8	γ	$\gamma > 0$
100	13	$N=1$	$N=2$
103	8	$\lambda(u_\varepsilon - u)$	$\lambda_o(u_\varepsilon - u)$
120	13	$X\ \Omega$	$X\ \Omega,\quad \psi(x) \geq 0$
122	12	$\int$	$\int_z^1$
130	10	$\overline{\Omega}$ (^{16})	$\overline{\Omega}$
132	17	$\overline{X}$,	X, reticulado,

En la pág. 76, línea 2, a partir de: "...lema 1.2;" se pretende hacer el siguiente comentario: "además por regularización podemos suponer F de clase C^∞ con lo que empleando de nuevo los métodos de enfundadura descritos en D.Gilbarg-N.S. Trudinger |47| podemos suponer $u_\varepsilon \in C^4(\overline{\Omega})$".

Al final del Capítulo II se hacen algunas referencias a ese mismo Capítulo obviamente las llamadas son sobre el principio del mismo.